

Synthèse Ultime

LEPL1105 — Analyse II

UCLouvain — Quadrimestre 2

Orientée résolution de problèmes

Basée sur les examens corrigés 2013–2025

Table des matières

1	Équations Différentielles Ordinaires (EDO)	4
1.1	Rappels théoriques	4
1.2	Procédures de résolution	5
1.2.1	Arbre décisionnel : quelle méthode utiliser ?	5
1.2.2	EDO linéaire homogène à coefficients constants	5
1.2.3	EDO linéaire non homogène : solution particulière	6
1.2.4	Problème de Cauchy (conditions initiales)	8
1.2.5	Système de deux EDO $\rightarrow$ une seule EDO	8
1.2.6	Cas particulier : membre de droite sin ou cos	9
1.3	L'opérateur différentiel (pour aller plus vite)	9
1.4	Tableau récapitulatif	10
1.5	Patterns récurrents d'examen (2013–2025)	10
1.6	Portraits de phase (systèmes linéaires 2D)	10
2	Fonctions de plusieurs variables	12
2.1	Rappels théoriques	12
2.2	Procédures de résolution	13
2.2.1	Calcul et preuve de limites en plusieurs variables	13
2.2.2	Extrema libres (sans contrainte)	14
2.2.3	Extrema liés : Méthode de la suppression	15
2.2.4	Optimisation sous contrainte (Lagrange)	15
2.2.5	Extrema sur un domaine compact	20
2.2.6	Théorème des fonctions implicites	20
2.2.7	Développement de Taylor et borne d'erreur	21
2.3	Aide-mémoire : classification des formes quadratiques	23
2.4	Le Lagrangien (formulation compacte)	23
2.5	Patterns récurrents d'examen (2013–2025)	23
3	Intégrales multiples	24
3.1	Rappels théoriques	24
3.2	Systèmes de coordonnées	24
3.2.1	Coordonnées polaires ($\mathbb{R}^2$)	25
3.2.2	Coordonnées cylindriques ($\mathbb{R}^3$)	25
3.2.3	Coordonnées sphériques ($\mathbb{R}^3$)	25
3.3	Procédures de résolution	26
3.3.1	Intégrale double sur un domaine quelconque	26
3.3.2	Changement en coordonnées polaires (pas-à-pas)	27
3.3.3	Intégrales triples	27
3.3.4	Domaines et bornes classiques	28
3.4	Formules utiles	28
3.5	Patterns récurrents d'examen (2013–2025)	28
4	Intégrales curvilignes	30
4.1	Rappels théoriques	30
4.2	Procédures de résolution	33
4.2.1	Calcul direct d'un travail (paramétrisation)	33
4.2.2	Champs conservatifs : définition et calcul du potentiel	33
4.2.3	Calcul de travail via le potentiel	34
4.3	Patterns récurrents d'examen (2013–2025)	35

5	Intégrales de surface et Flux	36
5.1	Rappels théoriques	36
5.2	Paramétrisations classiques (À retenir par cœur)	37
5.3	Procédures de résolution	37
5.3.1	Calcul direct d'un flux	37
5.3.2	Calcul de l'aire d'une surface	38
5.4	Patterns récurrents d'examen (2013–2025)	38
6	Théorèmes intégraux	40
6.1	Opérateurs différentiels (Nabla)	40
6.2	Théorèmes en dimension 2	40
6.3	Théorèmes en dimension 3	43
6.4	Procédures de résolution : Quel théorème choisir ?	48
6.5	Patterns récurrents d'examen (2013–2025)	49
6.6	Tableau récapitulatif des théorèmes	49
7	Méthodes transversales & Réflexes d'examen	52
7.1	Les <i>Red Flags</i> : signes que vous êtes sur la mauvaise piste	52
7.2	L'arbre de décision ultime pour les intégrales de champs vectoriels	52
7.3	Vérifications de bon sens (Sanity Checks)	53

1 Équations Différentielles Ordinaires (EDO)

Les EDO linéaires à coefficients constants constituent le premier grand pilier du cours. Le principe est simple : on cherche une fonction inconnue $y(t)$ qui satisfait une relation entre elle-même et ses dérivées. En pratique, ces équations modélisent des circuits électriques (RLC), des systèmes masse-ressort, ou la décroissance radioactive. La bonne nouvelle, c'est que la résolution repose entièrement sur un seul objet algébrique : le **polynôme caractéristique**.

1.1 Rappels théoriques

Commençons par poser le cadre. Toute EDO linéaire à coefficients constants se ramène à deux sous-problèmes : résoudre la partie homogène (membre de droite nul), puis trouver une solution particulière.

Définition – EDO linéaire à coefficients constants

Une **EDO linéaire à coefficients constants** d'ordre n a la forme :

$$\sum_{j=0}^n a_j y^{(j)}(t) = f(t) \quad \text{avec } a_j \in \mathbb{R}, a_n \neq 0.$$

- Si $f(t) = 0$: l'EDO est dite **homogène**.
- Si $f(t) \neq 0$: l'EDO est dite **non homogène**.
- L'espace des solutions de l'EDO homogène est un **sous-espace vectoriel** de dimension n .

Définition – Polynôme caractéristique

Le **polynôme caractéristique** associé à l'EDO est :

$$p(\alpha) = \sum_{j=0}^n a_j \alpha^j$$

Son degré est égal à l'ordre de l'EDO. Les racines de $p(\alpha)$ déterminent la solution homogène.

Théorème – Solution générale de l'EDO homogène

Soit α_k une racine de $p(\alpha)$ de multiplicité m_k . Les m_k fonctions

$$e^{\alpha_k t}, \quad t e^{\alpha_k t}, \quad t^2 e^{\alpha_k t}, \quad \dots, \quad t^{m_k-1} e^{\alpha_k t}$$

sont des solutions linéairement indépendantes. La **solution générale homogène** est la combinaison linéaire de toutes ces solutions (sur l'ensemble des racines).

Propriété – Structure de la solution générale (non homogène)

Si $y_P(t)$ est **une** solution particulière de l'EDO non homogène, alors

$$y(t) = y_H(t) + y_P(t)$$

où $y_H(t)$ est la solution générale de l'EDO homogène associée.

Propriété – Principe de superposition

Si le membre de droite est une somme $f(t) = f_1(t) + f_2(t)$, et si y_{P_1} (resp. y_{P_2}) est une solution particulière pour f_1 (resp. f_2), alors :

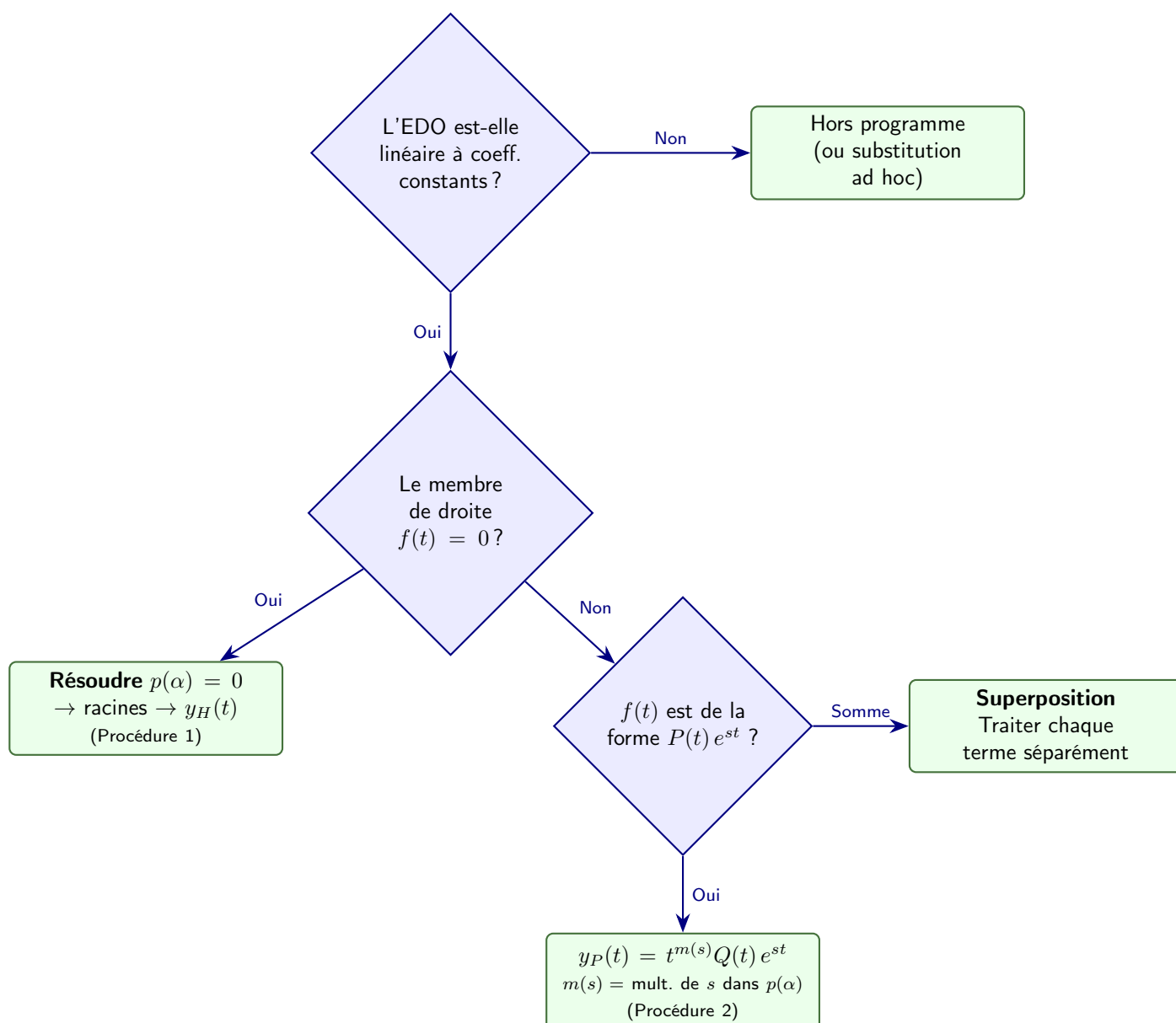
$$y_P(t) = y_{P_1}(t) + y_{P_2}(t)$$

est une solution particulière pour $f(t)$.

1.2 Procédures de résolution

Maintenant que les outils théoriques sont en place, passons à la pratique. Face à une EDO d'examen, la première question à se poser est : *par où commencer ?* L'arbre décisionnel ci-dessous vous guide pas à pas.

1.2.1 Arbre décisionnel : quelle méthode utiliser ?



1.2.2 EDO linéaire homogène à coefficients constants

Procédure : Résolution d'une EDO homogène

Donnée :
$$\sum_{j=0}^n a_j y^{(j)}(t) = 0$$

Étape 1 Écrire le polynôme caractéristique

$$p(\alpha) = a_n \alpha^n + a_{n-1} \alpha^{n-1} + \cdots + a_1 \alpha + a_0$$

Étape 2 Trouver les racines de $p(\alpha) = 0$

Pour l'ordre 2 : $p(\alpha) = a\alpha^2 + b\alpha + c$, calculer $\Delta = b^2 - 4ac$.

Étape 3 Construire la solution générale selon le type de racines :

Cas	Racines	Solution $y_H(t)$
$\Delta > 0$	$\alpha_1 \neq \alpha_2 \in \mathbb{R}$	$A e^{\alpha_1 t} + B e^{\alpha_2 t}$
$\Delta = 0$	α_0 double réelle	$(A + Bt) e^{\alpha_0 t}$
$\Delta < 0$	$\alpha = a \pm bi$	$e^{at} (A \cos(bt) + B \sin(bt))$

Étape 4 Appliquer les conditions initiales (si problème de Cauchy)

Résoudre le système linéaire pour déterminer $A, B, \dots$

Attention – Racines complexes conjuguées

- Si les coefficients a_j sont **réels**, les racines complexes viennent toujours par **paires conjuguées** $a \pm bi$.
- Pour les solutions **réelles**, on remplace $e^{(a \pm bi)t}$ par $e^{at} \cos(bt)$ et $e^{at} \sin(bt)$.
- **Piège d'examen** : Ne pas oublier la partie réelle e^{at} devant les fonctions trigonométriques ! Si $a < 0$, les oscillations sont **amorties**.

1.2.3 EDO linéaire non homogène : solution particulière**Procédure : Trouver une solution particulière**

Donnée : $\sum_{j=0}^n a_j y^{(j)}(t) = P(t) e^{st}$ où $P(t)$ est un polynôme de degré d .

Étape 1 Identifier s et le degré d de $P(t)$

Écrire le membre de droite sous la forme $P(t) e^{st}$.

Membre de droite	Identification
$3t^2 + 5t$	$P(t) = 3t^2 + 5t$ (degré 2), $s = 0$
$4e^{3t}$	$P(t) = 4$ (degré 0), $s = 3$
$(2t + 1)e^{-t}$	$P(t) = 2t + 1$ (degré 1), $s = -1$
$5 \sin(t) = \operatorname{Im}(5e^{it})$	$P(t) = 5$ (degré 0), $s = i$

Étape 2 Déterminer la multiplicité $m(s)$ de s comme racine de $p(\alpha)$

- Si s n'est **pas** racine de $p(\alpha)$: $m(s) = 0$.
- Si s est racine **simple** : $m(s) = 1$.
- Si s est racine **double** : $m(s) = 2$, etc.

Étape 3 Poser l'ansatz

$$y_P(t) = t^{m(s)} \cdot Q(t) \cdot e^{st}$$

où $Q(t)$ est un polynôme de **même degré** d que $P(t)$, à coefficients indéterminés.

Étape 4 Substituer $y_P(t)$ dans l'EDO et identifier les coefficients de $Q(t)$.

Étape 5 Écrire la solution complète : $y(t) = y_H(t) + y_P(t)$.

Astuce – Formule directe express (pour $f(t) = C e^{st}$)

Si le membre de droite est une simple exponentielle multipliée par une **constante** C , on peut utiliser une formule directe basée sur les dérivées du polynôme caractéristique $p(\alpha)$.

Soit l'EDO $p(\mathbb{D})[y] = C e^{st}$, où s est une racine de $p(\alpha)$ de **multiplicité** m . La solution particulière est donnée immédiatement par :

$$y_P(t) = C \frac{t^m}{p^{(m)}(s)} e^{st}$$

où $p^{(m)}(s)$ désigne la dérivée d'ordre m du polynôme caractéristique évaluée en s .

Exemple pratique : Pour résoudre $y'' - 6y' + 9y = 2e^{3t}$.

- $p(\alpha) = \alpha^2 - 6\alpha + 9 = (\alpha - 3)^2$.
- $f(t) = 2e^{3t}$, donc $C = 2$ et $s = 3$.
- $s = 3$ est racine **double** ($m = 2$).
- On dérive le polynôme deux fois : $p'(\alpha) = 2\alpha - 6$, $p''(\alpha) = 2$.

En appliquant la formule, on trouve instantanément :

$$y_P(t) = 2 \frac{t^2}{p''(3)} e^{3t} = 2 \frac{t^2}{2} e^{3t} = t^2 e^{3t}$$

C'est un raccourci puissant qui évite de dériver l'Ansatz $A t^2 e^{3t}$ deux fois !

Attention – Pièges classiques pour la solution particulière

- **Le facteur $t^{m(s)}$ est essentiel.** Sans lui, la substitution produit $0 = f(t)$ si s est racine de $p(\alpha)$. C'est le piège le plus fréquent en examen.
- **Membre de droite** = sin ou cos : passer par les complexes en utilisant e^{it} , résoudre, puis prendre la partie réelle ou imaginaire.
- **Superposition** : si $f(t) = f_1(t) + f_2(t)$, traiter chaque terme **séparément**.

Exemple – Examen Juin 2025, Q1 (circuit RLC)

EDO : $u''(t) + u'(t) + u(t) = E$ (avec $R = L = C = 1$).

Étape 1 : $p(\alpha) = \alpha^2 + \alpha + 1$, $\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$.

Étape 2 : Racines : $\alpha = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$, donc $a = -\frac{1}{2}$, $b = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Solution homogène :

$$y_H(t) = e^{-t/2} \left(A \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} t\right) + B \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} t\right) \right)$$

Solution particulière : $f(t) = E$ (constante), $s = 0$. Comme $p(0) = 1 \neq 0$, on pose $y_P = K$: substitution $\Rightarrow K = E$.

Solution générale :

$$u(t) = E + e^{-t/2} \left(A \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} t\right) + B \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} t\right) \right)$$

Conditions initiales $u(0) = 0$, $u'(0) = 0$: $B = -E$, $A = -\frac{E}{\sqrt{3}}$.

Exemple – Examen 2018, Q1c (racine double + superposition)**EDO :** $y''(t) - 4y'(t) + 4y(t) = t e^t + e^{2t}$ **Polynôme caractéristique :** $p(\alpha) = (\alpha - 2)^2 \Rightarrow$ racine double $\alpha = 2$.**Solution homogène :** $y_H(t) = (A + Bt) e^{2t}$ **Superposition :** traiter $t e^t$ et e^{2t} séparément.— **Terme $t e^t$:** $s = 1$, $p(1) = 1 \neq 0 \Rightarrow m(s) = 0$.Ansatz : $(a + bt) e^t \Rightarrow$ on trouve $a = 2, b = 1$, soit $y_{P_1} = (2 + t) e^t$.— **Terme e^{2t} :** $s = 2$, racine **double** $\Rightarrow m(s) = 2$.Ansatz : $c t^2 e^{2t} \Rightarrow$ substitution donne $2c = 1$, soit $y_{P_2} = \frac{1}{2} t^2 e^{2t}$.**Solution générale :**

$$y(t) = (A + Bt) e^{2t} + (2 + t) e^t + \frac{t^2}{2} e^{2t}$$

1.2.4 Problème de Cauchy (conditions initiales)**Procédure : Résolution d'un problème de Cauchy****Donnée :** EDO d'ordre n + conditions $y(t_0) = \gamma_0, y'(t_0) = \gamma_1, \dots, y^{(n-1)}(t_0) = \gamma_{n-1}$.**Étape 1** Trouver la **solution générale** $y(t) = y_H(t) + y_P(t)$ (avec n constantes libres).**Étape 2** Évaluer $y(t_0), y'(t_0), \dots$ en fonction des constantes.**Étape 3** Résoudre le **système linéaire** $n \times n$ pour déterminer les constantes.*Le théorème d'existence et d'unicité garantit qu'il y a **exactement une** solution.***Attention – Erreurs fréquentes (Cauchy)**

- **Dériver avant de substituer :** calculer $y'(t)$ à partir de la solution générale **complète** (homogène + particulière), pas juste $y'_H(t)$.
- **Point initial $t_0 \neq 0$:** substituer t_0 et non pas 0 dans le système.

1.2.5 Système de deux EDO $\rightarrow$ une seule EDO**Procédure : Réduction d'un système 2×2 à une EDO unique****Donnée :** Système couplé

$$\begin{cases} y'_1(t) = a y_1(t) + b y_2(t) + g_1(t) \\ y'_2(t) = c y_1(t) + d y_2(t) + g_2(t) \end{cases}$$

Étape 1 Isoler $y_1(t)$ dans l'une des équations (en fonction de y_2, y'_2, g).**Étape 2** Dériver cette expression pour obtenir $y'_1(t)$.**Étape 3** Substituer $y_1(t)$ et $y'_1(t)$ dans l'autre équation.**Étape 4** On obtient une **EDO unique** en $y_2(t)$ d'ordre 2, à résoudre par les méthodes précédentes.**Étape 5** Retrouver $y_1(t)$ par substitution inverse.**Exemple – Examen Juin 2022, Q1 (système couplé)****Système :**
$$\begin{cases} y'_1 = 3y_1 + y_2 + g(t) \\ y'_2 = y_1 + 3y_2 \end{cases}$$
De la 2^e équation : $y_1 = y'_2 - 3y_2$.

On dérive : $y_1' = y_2'' - 3y_2'$.

On substitue dans la 1^{re} : $y_2'' - 3y_2' = 3(y_2' - 3y_2) + y_2 + g(t)$, soit :

$$y_2''(t) - 6y_2'(t) + 8y_2(t) = g(t)$$

Polynôme caractéristique : $\alpha^2 - 6\alpha + 8 = (\alpha - 2)(\alpha - 4)$, racines $\alpha = 2$ et $\alpha = 4$.

1.2.6 Cas particulier : membre de droite sin ou cos

Procédure : Méthode des complexes pour $f(t) = \sin(\omega t)$ ou $\cos(\omega t)$

Objectif : Résoudre $\sum a_j y^{(j)}(t) = A \sin(\omega t)$ (ou cos).

Étape 1 Remplacer $\sin(\omega t)$ par $\text{Im}(e^{i\omega t})$ (ou cos par Re).

Étape 2 Résoudre l'EDO avec membre de droite $A e^{i\omega t}$ (appliquer la Procédure 2 avec $s = i\omega$).

Étape 3 Prendre la partie imaginaire (ou réelle) de la solution particulière obtenue.

Exemple – Examen 2016 (type récurrent)

EDO : $y''(t) + y(t) = 5 \sin(t)$

$p(\alpha) = \alpha^2 + 1$, racines $\pm i$. Donc $s = i$ est racine **simple** ($m = 1$).

On résout $y'' + y = 5e^{it}$. Ansatz : $y_P = ct e^{it}$ (facteur t car $m = 1$).

$$y_P' = c(1 + it)e^{it}, \quad y_P'' = c(2i - t)e^{it}.$$

$$\text{Substitution : } c(2i - t + t)e^{it} = 5e^{it} \Rightarrow 2ci = 5 \Rightarrow c = \frac{5}{2i} = -\frac{5i}{2}.$$

$$y_P^{\mathbb{C}} = -\frac{5i}{2} t e^{it} = -\frac{5i}{2} t (\cos t + i \sin t)$$

$$\text{Im}(y_P^{\mathbb{C}}) = -\frac{5}{2} t \cos(t) + \frac{5}{2} t \cdot 0 \Rightarrow y_P = \frac{5}{2} t \cos(t)$$

Attention au signe ! Toujours vérifier.

1.3 L'opérateur différentiel (pour aller plus vite)

Rappel – Factorisation de l'opérateur

On définit l'opérateur D tel que $D[y] = y'$. L'EDO s'écrit :

$$p(D)[y(t)] = f(t) \quad \text{où } p(D) = \sum_{j=0}^n a_j D^j$$

L'opérateur se factorise comme le polynôme caractéristique :

$$p(D) = a_n(D - \alpha_1 I)(D - \alpha_2 I) \cdots (D - \alpha_n I)$$

$$\text{Propriété clé : } (D - rI)[q(t)e^{st}] = \begin{cases} q'(t)e^{st} & \text{si } s = r \\ \tilde{q}(t)e^{st} & \text{si } s \neq r \text{ (deg } \tilde{q} = \text{deg } q) \end{cases}$$

Ceci explique pourquoi il faut multiplier par $t^{m(s)}$: chaque application de $(D - sI)$ “mange” un facteur t et dérive le polynôme.

1.4 Tableau récapitulatif

Situation	Méthode	Résultat
EDO homogène ordre 2,		
$\Delta > 0$	Racines réelles distinctes	$y_H = Ae^{\alpha_1 t} + Be^{\alpha_2 t}$
$\Delta = 0$	Racine double α_0	$y_H = (A + Bt)e^{\alpha_0 t}$
$\Delta < 0$	Racines complexes $a \pm bi$	$y_H = e^{at}(A \cos bt + B \sin bt)$
Non-homogène,		
$f(t) = P(t)e^{st}$	s non racine de p	$y_P = Q(t)e^{st}$, $\deg Q = \deg P$
$f(t) = P(t)e^{st}$, s racine de mult. m	Multiplier par t^m	$y_P = t^m Q(t)e^{st}$, $\deg Q = \deg P$
$f(t) = A \sin(\omega t)$	Complexifier, $s = i\omega$	Résoudre avec $e^{i\omega t}$, prendre Im
Problème de Cauchy	$y(t_0) = \gamma_0, \dots$	Système linéaire $\rightarrow$ constantes
Système 2×2	Élimination	Réduire à une EDO d'ordre 2

1.5 Patterns récurrents d'examen (2013–2025)

Statistiques des questions EDO aux examens

Q1 EDO d'ordre 2 homogène $\rightarrow$ non homogène : présent dans presque chaque examen.

- Calculer y_H via le polynôme caractéristique.
- Trouver y_P pour un ou plusieurs termes (superposition).
- Résoudre un problème de Cauchy avec conditions initiales.

Q2 Système de 2 EDO couplées : fréquent (2019, 2022, 2024).

- Éliminer une inconnue $\rightarrow$ EDO d'ordre 2.
- Résoudre, puis retrouver l'autre inconnue.

Q3 Discussion selon un paramètre : (2019, 2025).

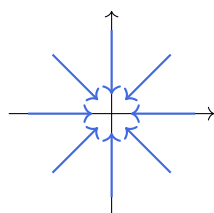
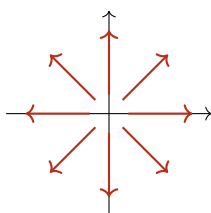
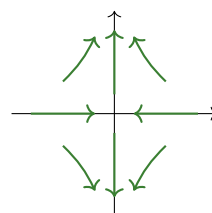
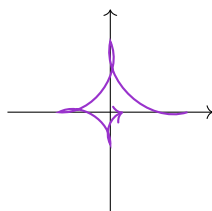
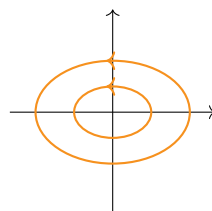
- Discuter le discriminant selon la valeur d'un paramètre R, ω , etc.
- Déterminer la valeur critique séparant oscillations/amortissement.

Q4 Application physique (circuit RLC, oscillateur) : 2020, 2025.

- Mise en équation à partir des lois physiques.
- L'EDO est toujours d'ordre 2 à coefficients constants.

1.6 Portraits de phase (systèmes linéaires 2D)

Pour un système $\mathbf{y}'(t) = A\mathbf{y}(t)$ avec $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, le comportement qualitatif dépend des valeurs propres λ_1, λ_2 de A .

**Nœud stable** $\lambda_1, \lambda_2 < 0$ réelles**Nœud instable** $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ réelles**Point-selle** $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ **Foyer stable** $\lambda = a \pm bi, a < 0$ **Centre** $\lambda = \pm bi$ (purement imaginaire)**Attention – Lien discriminant $\leftrightarrow$ oscillations**

Pour une EDO d'ordre 2 : $y'' + by' + cy = 0$, le discriminant $\Delta = b^2 - 4c$ détermine :

- $\Delta > 0$: pas d'oscillations (amortissement surcritique)
- $\Delta = 0$: cas limite (amortissement critique)
- $\Delta < 0$: oscillations (sous-amortissement)

Question type examen 2025 : “À partir de quelle valeur de R les oscillations disparaissent ?”

$\Rightarrow$ Résoudre $\Delta \geq 0$, c'est-à-dire $R^2 - 4LC \geq 0$.

2 Fonctions de plusieurs variables

On passe maintenant aux fonctions $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. C'est le cœur de l'analyse II : on généralise les notions de dérivée, de développement de Taylor et d'optimisation au cas multi-dimensionnel. Les outils centraux sont le **gradient** (direction de plus grande pente), la **matrice jacobienne** (dérivée totale), et la **matrice hessienne** (dérivées secondes, qui joue le rôle du signe de f'' pour classer les extrema).

2.1 Rappels théoriques

Rappelons d'abord les objets fondamentaux qu'on manipulera dans tout ce chapitre.

Définition – Dérivées partielles et gradient

Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 . Le **gradient** de f au point $\mathbf{a}$ est :

$$\nabla f(\mathbf{a}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a}) \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{a}) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \end{pmatrix}$$

- Le gradient pointe dans la **direction de plus grande variation** de f .
- Le gradient est **perpendiculaire aux courbes (surfaces) de niveau**.

Définition – Matrice jacobienne

Soit $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. La **matrice jacobienne** de $\mathbf{f}$ en $\mathbf{a}$ est :

$$J_{\mathbf{f}}(\mathbf{a}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}_{\mathbf{a}} \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

Pour $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ (scalaire) : $J_f = (\nabla f)^\top$ (vecteur ligne).

Définition – Matrice hessienne

Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 . La **matrice hessienne** de f en $\mathbf{a}$ est :

$$\nabla^2 f(\mathbf{a}) = H_f(\mathbf{a}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}_{\mathbf{a}}$$

Si $f \in C^2$: la hessienne est **symétrique** ($\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$).

La jacobienne du gradient est la hessienne : $J_{\nabla f} = H_f$.

Théorème – Développement de Taylor à l'ordre 2

Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 . Au voisinage de $\mathbf{a}$, avec $\mathbf{h} = \mathbf{x} - \mathbf{a}$:

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) = f(\mathbf{a}) + \nabla f(\mathbf{a})^\top \mathbf{h} + \frac{1}{2} \mathbf{h}^\top \nabla^2 f(\mathbf{a}) \mathbf{h} + o(\|\mathbf{h}\|^2)$$

Cas $n = 2$ (développement autour de (a, b) , avec $\Delta x = x - a$, $\Delta y = y - b$) :

$$\begin{aligned} T_2(x, y) = f(a, b) &+ \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y \\ &+ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Delta x^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \Delta x \Delta y + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \Delta y^2 \right) \end{aligned}$$

Propriété – Reste de Taylor d'ordre 3 (formule exacte et borne)

Pour un développement de f à l'ordre 2 autour de l'origine $(0, 0)$ évalué au point (a, b) , l'erreur exacte est donnée par le reste d'ordre 3 évalué en un point intermédiaire $(\theta a, \theta b)$ avec $\theta \in]0, 1[$:

$$E(\theta) = \frac{1}{3!} \left(a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y} \right)^3 f(\theta a, \theta b)$$

L'opérateur se développe via le binôme de Newton (très rapide à appliquer) :

$$(a \partial_x + b \partial_y)^3 = a^3 \partial_{xxx} + 3a^2 b \partial_{xxy} + 3ab^2 \partial_{xyy} + b^3 \partial_{yyy}$$

De manière plus générale pour un accroissement $\mathbf{h} = (\Delta x, \Delta y)$, l'erreur est **bornée** par :

$$|E| \leq \frac{1}{6} \sum_{i+j=3} \binom{3}{i} \sup \left| \frac{\partial^3 f}{\partial x^i \partial y^j} \right| \cdot |\Delta x|^i |\Delta y|^j$$

Pour $|\Delta x| \leq \varepsilon$ et $|\Delta y| \leq \varepsilon$, on factorise ε^3 .

Théorème – Règle de la chaîne

Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ différentiable en $\mathbf{a}$ et $g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$ différentiable en $f(\mathbf{a})$. Alors :

$$J_{g \circ f}(\mathbf{a}) = J_g(f(\mathbf{a})) \cdot J_f(\mathbf{a})$$

La jacobienne d'une composée est le produit des jacobienes.

2.2 Procédures de résolution

Ce chapitre regroupe les grandes catégories de problèmes d'examen : limites, extrema libres, optimisation sous contrainte (Lagrange), fonctions implicites et développements de Taylor. Chaque sous-section suit le même schéma : une procédure pas-à-pas, suivie d'un exemple d'examen résolu.

2.2.1 Calcul et preuve de limites en plusieurs variables

Procédure : Étude d'une limite $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x})$

Étape 1 Conjecturer la valeur de la limite (substitution directe, intuition).

Étape 2 Si on pense que la limite existe, la prouver par l'une des méthodes :

- **Coordonnées polaires** (autour de l'origine) : poser $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, montrer que le résultat ne dépend **pas** de θ quand $r \rightarrow 0$.

— **Encadrement** (“sandwich”) : $|f(\mathbf{x}) - L| \leq g(\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|)$ avec $g \rightarrow 0$.

Étape 3 Si on pense que la limite n'existe pas, le prouver :

- **Deux chemins différents** donnant des limites différentes.
- Exemples de chemins : $y = 0$, $y = x$, $y = x^2$, $y = mx$, $x = 0$.

Attention – Coordonnées polaires : quand ça marche et quand ça ne marche pas

- Poser $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ et faire $r \rightarrow 0^+$.
- **Si le résultat dépend de θ** : la limite n'existe PAS.
- **Si le résultat ne dépend pas de θ** : la limite existe et vaut ce résultat.
- **Piège** : si après simplification il reste du θ “caché” (par ex. $\cos^2 \theta$ borné mais non constant), il faut majorer $|f|$ et utiliser un encadrement.

Exemple – Limite classique d'examen

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$$

Polaires : $\frac{r^2 \cos^2 \theta \cdot r \sin \theta}{r^2} = r \cos^2 \theta \sin \theta$.

Comme $|\cos^2 \theta \sin \theta| \leq 1$ et $r \rightarrow 0$:

$$|f(r, \theta)| \leq r \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0. \quad \Rightarrow \text{La limite vaut } \boxed{0}.$$

2.2.2 Extrema libres (sans contrainte)

Procédure : Recherche d'extrema libres de $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

Étape 1 Calculer le gradient $\nabla f(x_1, \dots, x_n)$.

Étape 2 Résoudre $\nabla f = 0$ pour trouver les **points critiques**.

Étape 3 Calculer la matrice hessienne H_f en chaque point critique.

Étape 4 Classifier le point critique via la hessienne :

Cas $n = 2$: Soit $H = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ la hessienne au point critique.

Condition	Conclusion
$\det(H) > 0$ et $\text{Tr}(H) > 0$	Minimum local (déf. positive)
$\det(H) > 0$ et $\text{Tr}(H) < 0$	Maximum local (déf. négative)
$\det(H) < 0$	Point-selle (indéfinie)
$\det(H) = 0$	Cas dégénéré (analyse supplémentaire)

Rappel : $\det(H) = ac - b^2 = \lambda_1 \lambda_2$ et $\text{Tr}(H) = a + c = \lambda_1 + \lambda_2$.

Attention – Conditions nécessaires vs suffisantes

Condition	Nécessaire pour		Suffisante pour	
	min local	min global	min local	min global
$\nabla f = 0$	OUI	OUI	NON	NON
$\nabla f = 0$ et $H_f \succ 0$	NON	NON	OUI	NON
$\nabla f = 0$ et $H_f \succeq 0$	OUI	OUI	NON	NON

Ce tableau est tombé tel quel à l'examen de Juin 2025 (Q3).

2.2.3 Extrema liés : Méthode de la suppression

Une alternative (souvent plus simple) aux multiplicateurs de Lagrange consiste à utiliser la contrainte $g(x, y) = 0$ pour isoler une variable (par exemple y) et l'injecter dans la fonction $f(x, y)$ afin de se ramener à un problème d'extremum libre.

Procédure : Méthode de la suppression

Étape 1 Isoler une variable dans l'équation de la contrainte (ex : $y = h(x)$).

Étape 2 Substituer cette expression dans la fonction à optimiser : $F(x) = f(x, h(x))$.

Étape 3 Optimiser la nouvelle fonction sans contrainte (calculer $F'(x) = 0$).

Étape 4 Vérifier la nature de l'extremum (ex : signe de $F''(x)$).

Attention : Cette méthode ne fonctionne que si la contrainte permet d'isoler explicitement une variable sans ambiguïté.

2.2.4 Optimisation sous contrainte (Lagrange)

Procédure : Multiplicateurs de Lagrange

Problème : Optimiser $f(\mathbf{x})$ sous la (les) contrainte(s) $g_i(\mathbf{x}) = 0$.

Conditions d'application :

- Les fonctions f et g_i doivent être de **classe C^1** sur le domaine d'étude. (ex : les polynômes le sont toujours).
- Le gradient de la contrainte ne doit pas s'annuler sur la courbe : $\nabla g_i(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}$ pour tout point vérifiant $g_i(\mathbf{x}) = 0$. (Si c'est le cas, ces points sont des candidats exceptionnels).

Étape 1 Écrire la condition de Lagrange

$$\nabla f(\mathbf{a}) = \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla g_i(\mathbf{a}) \quad \text{et} \quad g_i(\mathbf{a}) = 0 \quad \forall i$$

Étape 2 Vérifier la qualification des contraintes :

Les $\nabla g_i(\mathbf{a})$ doivent être **linéairement indépendants** (i.e. $\nabla g_i \neq \mathbf{0}$).

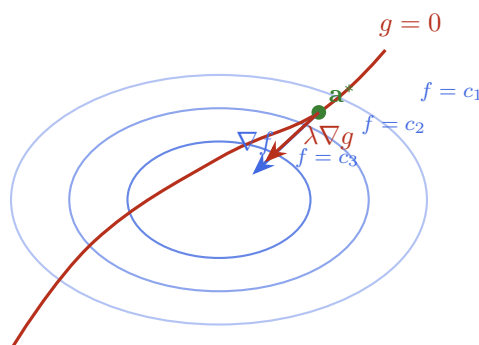
Si $\nabla g(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$: ce point est une **exception** à vérifier séparément.

Étape 3 Résoudre le système : $n + m$ équations pour $n + m$ inconnues ($\mathbf{a}$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_m$).

Étape 4 Classifier les solutions (par comparaison des valeurs de f , ou par la hessienne bordée).

Étape 5 Vérifier les exceptions : points où $\nabla g = \mathbf{0}$.

Interprétation géométrique : en un extremum sous contrainte, $\nabla f \parallel \nabla g$, c'est-à-dire que les courbes de niveau de f et de g sont **tangentes**.



Les gradients sont parallèles au point optimal

Exemple – Examen Juin 2025, Q4 (investissement optimal)

Problème : Maximiser $f(x, y, z) = r(x) + s(y) + t(z)$ sous $x + y + z = 1000$.

Contrainte : $g(x, y, z) = x + y + z - 1000 = 0$.

Lagrange : $\nabla f = \lambda \nabla g$ donne :

$$\begin{pmatrix} r'(x) \\ s'(y) \\ t'(z) \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \boxed{r'(x) = s'(y) = t'(z) = \lambda}$$

Exceptions : $\nabla g = (1, 1, 1)^\top \neq \mathbf{0}$ partout $\Rightarrow$ aucune exception.

Interprétation économique : à l'optimum, les rendements marginaux des trois investissements sont tous égaux.

Exemple – Examen Juin 2019, Q1 (distance min/max à l'origine sur une ellipse)

Énoncé complet. Dans le plan $\mathbb{R}^2$, on considère la courbe

$$\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 9x^2 + 2xy + 9y^2 = 1\}.$$

- (a) Montrer que les extrema de la distance à l'origine sur $\mathcal{C}$ existent.
- (b) Écrire le système de Lagrange et le résoudre.
- (c) Trouver les points de $\mathcal{C}$ les plus proches et les plus éloignés de l'origine.
- (d) Déterminer les distances minimale et maximale à l'origine.

(a) Existence des extrema.

Raisonnement : On invoque le **théorème des bornes atteintes** (Weierstrass).

- La courbe $\mathcal{C}$ est définie par $g(x, y) = 9x^2 + 2xy + 9y^2 - 1 = 0$.
- g est un polynôme, donc de classe $C^\infty \Rightarrow \mathcal{C}$ est un ensemble **fermé** (image réciproque de $\{0\}$ par une fonction continue).
- $\mathcal{C}$ est **borné** : en effet, sur $\mathcal{C}$,

$$1 = 9x^2 + 2xy + 9y^2 \geq 9x^2 - 2|x||y| + 9y^2 \geq 9(x^2 + y^2) - (x^2 + y^2) = 8(x^2 + y^2)$$

donc $x^2 + y^2 \leq \frac{1}{8}$, ce qui montre que $\mathcal{C}$ est contenu dans le disque de rayon $\frac{1}{2\sqrt{2}}$.

(On a utilisé l'inégalité AM-GM : $2|x||y| \leq x^2 + y^2$.)

- $\mathcal{C}$ est **non vide** : par exemple $(x, y) = (1/3, 0)$ vérifie $g = 0$.

$\Rightarrow \mathcal{C}$ est un **compact non vide**, et $f(x, y) = x^2 + y^2$ est continue, donc f atteint son minimum et son maximum sur $\mathcal{C}$. $\square$

(b) Système de Lagrange.

Raisonnement : On cherche les extrema de $f(x, y) = x^2 + y^2$ (distance au carré à l'origine) sous la contrainte $g(x, y) = 9x^2 + 2xy + 9y^2 - 1 = 0$.

Calcul des gradients :

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}, \quad \nabla g = \begin{pmatrix} 18x + 2y \\ 2x + 18y \end{pmatrix}$$

Condition de Lagrange : $\nabla f = \lambda \nabla g$ donne le système :

$$\begin{cases} 2x = \lambda(18x + 2y) & \text{(L1)} \\ 2y = \lambda(2x + 18y) & \text{(L2)} \\ 9x^2 + 2xy + 9y^2 = 1 & \text{(L3 : contrainte)} \end{cases}$$

Vérification de la qualification : $\nabla g = \mathbf{0} \Leftrightarrow 18x + 2y = 0$ et $2x + 18y = 0$, soit $x = y = 0$. Or $(0, 0) \notin \mathcal{C}$ (car $g(0, 0) = -1 \neq 0$). Donc $\nabla g \neq \mathbf{0}$ sur $\mathcal{C}$: **pas d'exception**.

Résolution du système (l'astuce : éliminer λ).

Stratégie clé : Plutôt qu'isoler x ou y , on isole λ dans les deux premières équations et on égale.

$$\text{De (L1) : } \lambda = \frac{2x}{18x + 2y} = \frac{x}{9x + y} \quad (\text{si } 9x + y \neq 0).$$

$$\text{De (L2) : } \lambda = \frac{2y}{2x + 18y} = \frac{y}{x + 9y} \quad (\text{si } x + 9y \neq 0).$$

En égalant :

$$\frac{x}{9x + y} = \frac{y}{x + 9y} \quad \Longrightarrow \quad x(x + 9y) = y(9x + y)$$

$$x^2 + 9xy = 9xy + y^2 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{x^2 = y^2 \Leftrightarrow y = x \text{ ou } y = -x}$$

(c) Trouver les points.

Cas 1 : $y = x$. On injecte dans la contrainte (L3) :

$$9x^2 + 2x \cdot x + 9x^2 = 1 \Rightarrow 20x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{20}} = \pm \frac{1}{2\sqrt{5}}$$

$\Rightarrow$ Points : $P_1 = \left(\frac{1}{2\sqrt{5}}, \frac{1}{2\sqrt{5}}\right)$ et $P_2 = \left(-\frac{1}{2\sqrt{5}}, -\frac{1}{2\sqrt{5}}\right)$.

Cas 2 : $y = -x$. On injecte dans (L3) :

$$9x^2 + 2x(-x) + 9x^2 = 1 \Rightarrow 16x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm \frac{1}{4}$$

$\Rightarrow$ Points : $P_3 = \left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right)$ et $P_4 = \left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$.

(d) Distances minimale et maximale.

On évalue $f(x, y) = x^2 + y^2$ en chacun des 4 candidats :

Point	Coordonnées	$f = x^2 + y^2$	Nature
P_1, P_2	$\left(\pm \frac{1}{2\sqrt{5}}, \pm \frac{1}{2\sqrt{5}}\right)$	$\frac{1}{20} + \frac{1}{20} = \frac{1}{10}$	minimum
P_3, P_4	$\left(\pm \frac{1}{4}, \mp \frac{1}{4}\right)$	$\frac{1}{16} + \frac{1}{16} = \frac{1}{8}$	maximum

Conclusion :

- **Distance minimale** à l'origine : $d_{\min} = \sqrt{1/10} = \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$, atteinte en P_1 et P_2 (direction $y = x$).
- **Distance maximale** à l'origine : $d_{\max} = \sqrt{1/8} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$, atteinte en P_3 et P_4 (direction $y = -x$).

Interprétation géométrique : les points les plus proches/éloignés de l'origine correspondent aux extrémités des **axes de l'ellipse**. La direction $y = x$ est le petit axe (plus proche), et $y = -x$ le grand axe (plus éloigné). Ces directions correspondent aux **vecteurs propres** de la matrice $A = \begin{pmatrix} 9 & 1 \\ 1 & 9 \end{pmatrix}$, avec valeurs propres $\lambda_1 = 10$ et $\lambda_2 = 8$.

Exemple – Lagrange à deux contraintes : extrema sur l'intersection sphère/plan

Problème. Trouver les extrema de $f(x, y, z) = x + 2y + 3z$ sur la courbe $\mathcal{C}$ définie par :

$$g_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 14 = 0 \quad (\text{sphère de rayon } \sqrt{14})$$

$$g_2(x, y, z) = x + y + z - 4 = 0 \quad (\text{plan})$$

Raisonnement. C'est un problème d'optimisation sous **deux contraintes** en $\mathbb{R}^3$: on optimise f sur l'intersection d'une sphère et d'un plan (qui est un cercle dans l'espace). On a 3 inconnues (x, y, z) et 2 multiplicateurs (λ_1, λ_2) , soit un système de 5 équations à 5 inconnues.

Étape 1 : Vérifier les conditions d'application.

Les trois fonctions f, g_1, g_2 sont des polynômes, donc de classe C^∞ . Il faut aussi vérifier que ∇g_1 et ∇g_2 sont **linéairement indépendants** sur $\mathcal{C}$.

- $\nabla g_1 = (2x, 2y, 2z)$ s'annule uniquement à l'origine, qui ne vérifie pas $g_1 = 0$ (car $0 \neq 14$). ✓
- $\nabla g_2 = (1, 1, 1) \neq \mathbf{0}$ partout. ✓
- Pour l'indépendance linéaire : $\nabla g_1 \parallel \nabla g_2$ ssi $(2x, 2y, 2z) = \mu(1, 1, 1)$ ssi $x = y = z$. Injectons dans g_2 : $3x = 4$, soit $x = 4/3$. Vérifions g_1 : $3(4/3)^2 = 48/9 \neq 14$. Ce point ne vérifie pas les deux contraintes simultanément. ✓

Les conditions sont satisfaites partout sur $\mathcal{C}$.

Étape 2 : Écrire le système de Lagrange.

La condition $\nabla f = \lambda_1 \nabla g_1 + \lambda_2 \nabla g_2$ donne, composante par composante :

$$\begin{cases} (L_1) & 1 = 2\lambda_1 x + \lambda_2 \\ (L_2) & 2 = 2\lambda_1 y + \lambda_2 \\ (L_3) & 3 = 2\lambda_1 z + \lambda_2 \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} (C_1) & x^2 + y^2 + z^2 = 14 \\ (C_2) & x + y + z = 4 \end{cases}$$

Étape 3 : Résoudre le système.

Astuce : éliminer λ_2 par soustraction.

$$(L_2) - (L_1) : 1 = 2\lambda_1(y - x), \text{ donc } y - x = \frac{1}{2\lambda_1}.$$

$$(L_3) - (L_2) : 1 = 2\lambda_1(z - y), \text{ donc } z - y = \frac{1}{2\lambda_1}.$$

Ainsi $y - x = z - y$, d'où x, y, z forment une progression arithmétique de raison $r = \frac{1}{2\lambda_1}$. On peut écrire :

$$x = y - r, \quad z = y + r \quad \text{avec } r = \frac{1}{2\lambda_1}$$

$$\text{Injection dans } (C_2) : (y - r) + y + (y + r) = 4, \text{ donc } 3y = 4, \text{ soit } \boxed{y = \frac{4}{3}}.$$

$$\text{Injection dans } (C_1) : (y - r)^2 + y^2 + (y + r)^2 = 14.$$

$$3y^2 + 2r^2 = 14 \implies 3 \cdot \frac{16}{9} + 2r^2 = 14 \implies \frac{16}{3} + 2r^2 = 14 \implies r^2 = \frac{13}{3} \implies r = \pm \sqrt{\frac{13}{3}}$$

Étape 4 : Les deux candidats.

Avec $y = 4/3$ et $r = \pm \sqrt{13/3}$:

$$P_1 = \left(\frac{4}{3} - \sqrt{\frac{13}{3}}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3} + \sqrt{\frac{13}{3}} \right), \quad P_2 = \left(\frac{4}{3} + \sqrt{\frac{13}{3}}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3} - \sqrt{\frac{13}{3}} \right)$$

Étape 5 : Classifier par évaluation de f .

On calcule $f = x + 2y + 3z = (x + y + z) + (y + 2z) = 4 + (y + 2z)$.

$$\text{Pour } P_1 : f = 4 + \frac{4}{3} + 2 \left(\frac{4}{3} + \sqrt{\frac{13}{3}} \right) = 4 + \frac{4}{3} + \frac{8}{3} + 2\sqrt{\frac{13}{3}} = 8 + 2\sqrt{\frac{13}{3}}.$$

$$\text{Pour } P_2 : f = 8 - 2\sqrt{\frac{13}{3}}.$$

Point	$f(P)$	Nature
P_1	$8 + 2\sqrt{13/3}$	maximum
P_2	$8 - 2\sqrt{13/3}$	minimum

Pourquoi cet exemple est-il important? Il illustre le pattern d'examen **Lagrange à deux contraintes**, où l'astuce clé est de soustraire les équations du gradient deux à deux pour éliminer λ_2 et faire apparaître une structure simple (ici, une progression arithmétique). C'est un réflexe indispensable dès qu'on a ≥ 2 contraintes.

2.2.5 Extrema sur un domaine compact

Procédure : Extrema globaux sur un domaine fermé borné

Hypothèse : f continue sur un compact $\overline{D} \Rightarrow$ les extrema globaux **existent** (théorème des bornes atteintes).

Étape 1 Intérieur : chercher les points critiques ($\nabla f = \mathbf{0}$) à l'intérieur de D .

Étape 2 Frontière : optimiser f sur ∂D :

- Soit par **paramétrage** de la frontière (la réduire à une variable).
- Soit par **Lagrange** (la frontière est une contrainte $g = 0$).

Étape 3 Points singuliers : ajouter les points où ∇f n'existe pas (coins, arêtes).

Étape 4 Comparer les valeurs de f en tous les candidats $\Rightarrow$ sélectionner le min/max global.

Attention – Erreur classique : oublier la frontière

- Sur un domaine **fermé**, les extrema globaux se trouvent souvent sur la **frontière**, pas à l'intérieur !
- Bien **décomposer** la frontière en morceaux (segments, arcs de cercle...) et traiter chacun.
- Les **coins** (jonctions entre morceaux de frontière) sont toujours candidats.

2.2.6 Théorème des fonctions implicites

Théorème – Fonctions implicites

Soit $F : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 avec $F(a_1, \dots, a_n, b) = 0$.

Si $\frac{\partial F}{\partial y}(a_1, \dots, a_n, b) \neq 0$, alors il existe un voisinage de $\mathbf{a}$ et une unique fonction $y = \varphi(x_1, \dots, x_n)$ de classe C^1 telle que :

$$F(x_1, \dots, x_n, \varphi(x_1, \dots, x_n)) = 0$$

et les dérivées partielles de φ sont données par :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$$

Procédure : Application du théorème des fonctions implicites

Étape 1 Identifier $F(x, y) = 0$ (ou $F(x, y, z) = 0$).

Étape 2 Vérifier que $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$ au point considéré.

Étape 3 Calculer les dérivées partielles de la fonction implicite : $\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}$.

Étape 4 Pour les **dérivées d'ordre 2**, dériver la formule implicitement une seconde fois.

2.2.7 Développement de Taylor et borne d'erreur

Procédure : Taylor d'ordre 2 pour $f(x, y)$ autour de (a, b)

Étape 1 Calculer $f(a, b)$, $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$.

Étape 2 Calculer la hessienne en (a, b) : les 4 dérivées secondes.

Étape 3 Assembler :

$$T_2(x, y) = f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} (\Delta x)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \Delta x \Delta y + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} (\Delta y)^2 \right)$$

où $\Delta x = x - a$, $\Delta y = y - b$.

Étape 4 Borne d'erreur (si demandé) : majorer le reste d'ordre 3 :

$$|f - T_2| \leq \frac{1}{6} (M_{30} |\Delta x|^3 + 3M_{21} |\Delta x|^2 |\Delta y| + 3M_{12} |\Delta x| |\Delta y|^2 + M_{03} |\Delta y|^3)$$

où $M_{ij} = \sup \left| \frac{\partial^3 f}{\partial x^i \partial y^j} \right|$ sur le domaine.

Exemple – Examen Juin 2025, Q2 (Taylor + borne d'erreur)

$f(x, y) = \ln(1 + x e^y)$ autour de $(1, 0)$.

Calculs : $f(1, 0) = \ln 2$, $f_x = \frac{e^y}{1 + x e^y}$, $f_y = \frac{x e^y}{1 + x e^y}$.

En $(1, 0)$: $f_x = f_y = \frac{1}{2}$.

Hessienne en $(1, 0)$: $H = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Taylor ordre 2 :

$$T_2(x, y) = \ln 2 + \frac{1}{2}(x - 1) + \frac{1}{2}y - \frac{1}{8}(x - 1)^2 + \frac{1}{4}(x - 1)y + \frac{1}{8}y^2$$

Borne d'erreur sur $R = \{|x - 1| \leq \varepsilon, |y| \leq \varepsilon\}$ avec bornes $M_{30} = 2, M_{21} = M_{12} = 3, M_{03} = 4$:

$$|E| \leq \frac{1}{6}(2 + 9 + 9 + 4)\varepsilon^3 = \boxed{4\varepsilon^3}$$

Exemple – Examen Mai 2021, Q2 (Taylor complet : développement + reste exact + encadrement)

Problème. Soit f de classe C^3 sur $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y > 0\}$. On sait que $f(1, 1) = 6$ et que le gradient vaut en tout point :

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 4x + 2y - \frac{8}{x} \\ 2x + 4y - \frac{8}{y} \end{pmatrix}$$

(a) Calculer le développement de Taylor $T_2(x, y)$ d'ordre 2 autour de $(1, 1)$.

(b) Calculer explicitement le reste $E(\theta)$ tel que $f(2, 2) = T_2(2, 2) + E(\theta)$.

(c) En déduire un intervalle $[a, b]$ contenant $f(2, 2)$ à coup sûr.

(a) Développement de Taylor d'ordre 2.

On a besoin de $f(1, 1)$, $\nabla f(1, 1)$ et $\nabla^2 f(1, 1)$.

Valeur et gradient en $(1, 1)$:

$$f(1, 1) = 6, \quad \nabla f(1, 1) = \begin{pmatrix} 4 + 2 - 8 \\ 2 + 4 - 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Hessienne : On dérive le gradient (attention, f n'est pas connue explicitement, mais son gradient l'est !) :

$$\nabla^2 f(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} (4x + 2y - \frac{8}{x}) & \frac{\partial}{\partial y} (4x + 2y - \frac{8}{x}) \\ \frac{\partial}{\partial x} (2x + 4y - \frac{8}{y}) & \frac{\partial}{\partial y} (2x + 4y - \frac{8}{y}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 + \frac{8}{x^2} & 2 \\ 2 & 4 + \frac{8}{y^2} \end{pmatrix}$$

En $(1, 1)$: $\nabla^2 f(1, 1) = \begin{pmatrix} 12 & 2 \\ 2 & 12 \end{pmatrix}$.

Assemblage : Avec $\Delta x = x - 1$, $\Delta y = y - 1$:

$$T_2(x, y) = 6 - 2\Delta x - 2\Delta y + \frac{1}{2}(12(\Delta x)^2 + 2 \cdot 2 \Delta x \Delta y + 12(\Delta y)^2)$$

$$T_2(x, y) = 6 - 2(x - 1) - 2(y - 1) + 6(x - 1)^2 + 2(x - 1)(y - 1) + 6(y - 1)^2$$

(b) Calcul du reste exact $E(\theta)$.

Le reste de Taylor d'ordre 3 s'écrit ($\mathbf{h} = (h_x, h_y) = (1, 1)$ car on évalue en $(2, 2) = (1, 1) + (1, 1)$) :

$$E(\theta) = \frac{1}{6} \left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} h_x^3 + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} h_x^2 h_y + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} h_x h_y^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} h_y^3 \right) \Big|_{\mathbf{a} + \theta \mathbf{h}}$$

Calculons les dérivées troisièmes en dérivant la hessienne :

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = -\frac{16}{x^3}, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} = -\frac{16}{y^3}$$

En $\mathbf{a} + \theta \mathbf{h} = (1 + \theta, 1 + \theta)$ et avec $h_x = h_y = 1$:

$$E(\theta) = \frac{1}{6} \left(-\frac{16}{(1 + \theta)^3} + 0 + 0 - \frac{16}{(1 + \theta)^3} \right) = \boxed{-\frac{16}{3(1 + \theta)^3}}$$

(c) Encadrement de $f(2, 2)$.

On sait que $\theta \in [0, 1]$, donc $(1 + \theta)^3 \in [1, 8]$.

Ainsi $E(\theta) \in \left[-\frac{16}{3}, -\frac{2}{3}\right]$.

Or $T_2(2, 2) = 6 - 2 - 2 + 6 + 2 + 6 = 16$.

Donc $f(2, 2) = 16 + E(\theta) \in \left[\frac{32}{3}, \frac{46}{3}\right]$.

Vérification : La fonction cachée est $f(x, y) = 2x^2 + 2xy + 2y^2 - 8 \ln(xy)$, ce qui donne $f(2, 2) \approx 12,91 \in [10,67; 15,33]$. ✓

Leçon d'examen : Ce type de problème où la fonction est "mystérieuse" (on ne connaît que son gradient) revient très régulièrement. L'astuce est de se rappeler que la hessienne s'obtient en dérivant le gradient, et que les dérivées troisièmes s'obtiennent en dérivant la hessienne. Pas besoin de connaître f elle-même !

2.3 Aide-mémoire : classification des formes quadratiques

Rappel – Formes quadratiques et valeurs propres (2×2)

Soit $H = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix}$ symétrique. On a $\det(H) = \alpha\gamma - \beta^2$ et $\text{Tr}(H) = \alpha + \gamma$.

Nature	Condition (val. propres)	Condition (2×2)
Définie positive	$\lambda_1, \lambda_2 > 0$	$\det > 0$ et $\text{Tr} > 0$
Définie négative	$\lambda_1, \lambda_2 < 0$	$\det > 0$ et $\text{Tr} < 0$
Indéfinie	$\lambda_1 < 0 < \lambda_2$	$\det < 0$
Semi-définie pos.	$\lambda_i \geq 0$, un = 0	$\det = 0$ et $\text{Tr} \geq 0$
Semi-définie nég.	$\lambda_i \leq 0$, un = 0	$\det = 0$ et $\text{Tr} \leq 0$

Pour $n > 2$ (critère des mineurs principaux dominants) :

- **Déf. positive** $\Leftrightarrow$ tous les mineurs $\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \dots, \Delta_n > 0$.
- **Déf. négative** $\Leftrightarrow$ signes alternés $\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 < 0, \dots$

2.4 Le Lagrangien (formulation compacte)

Rappel – Lagrangien

On peut regrouper les conditions de Lagrange en un seul objet. Définir :

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \lambda_1, \dots, \lambda_m) = f(\mathbf{x}) - \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(\mathbf{x})$$

Alors les conditions $\nabla f = \sum \lambda_i \nabla g_i$ et $g_i = 0$ sont équivalentes à :

$$\boxed{\nabla_{\mathbf{x}, \lambda} \mathcal{L} = \mathbf{0}}$$

i.e. le gradient du lagrangien par rapport à **toutes** les variables ($\mathbf{x}$ et λ) est nul.

2.5 Patterns récurrents d'examen (2013–2025)

Statistiques des questions “Fonctions de plusieurs variables”

T1 Développement de Taylor + borne d'erreur : très fréquent (2017, 2019, 2020, 2023, 2025).

- Calcul de T_1 (plan tangent) puis T_2 .
- Borne sur l'erreur avec les dérivées troisièmes $\Rightarrow$ factoriser en ε^3 .

T2 Optimisation sous contrainte (Lagrange) : présent dans **presque chaque session**.

- Écrire et résoudre le système $\nabla f = \lambda \nabla g$.
- Ne pas oublier de vérifier les exceptions ($\nabla g = 0$).
- Identifier min/max par comparaison des valeurs de f .

T3 Classification des points critiques (hessienne) : récurrent.

- Calcul du déterminant et de la trace de la hessienne.
- Tableau nécessaire/suffisant (question théorique 2025).

T4 Plan tangent / Gradient / Différentiabilité : souvent intégré dans les autres questions.

3 Intégrales multiples

Après avoir étudié les fonctions de plusieurs variables, on s'intéresse maintenant à leur **intégration**. Les intégrales doubles et triples généralisent l'intégrale de Riemann : au lieu de calculer l'aire sous une courbe, on calcule le volume sous une surface (2D) ou la "masse" d'un solide (3D). La difficulté principale n'est pas le calcul lui-même, mais le **choix du bon système de coordonnées** (cartésiennes, polaires, cylindriques, sphériques) et la **détermination des bornes** d'intégration.

3.1 Rappels théoriques

Définition – Intégrale double et triple

Soit f continue sur un domaine D à frontière régulière.

$$\iint_D f(x, y) \, dA = \iint_D f(x, y) \, dx \, dy \qquad \iiint_D f(x, y, z) \, dV = \iiint_D f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$$

Applications :

- $f = 1$: aire de D (2D) ou volume de D (3D).
- $f = \rho$ (densité) : masse totale $M = \iint_D \rho \, dA$.
- Centre de gravité : $\bar{x} = \frac{1}{M} \iint_D x \rho \, dA$, $\bar{y} = \frac{1}{M} \iint_D y \rho \, dA$.

Théorème – Fubini (réduction à des intégrales itérées)

Si f est continue sur D :

Type I (D décrit verticalement) : $D = \{(x, y) : a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$

$$\iint_D f \, dA = \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) \, dy \right) dx$$

Type II (D décrit horizontalement) : $D = \{(x, y) : c \leq y \leq d, h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}$

$$\iint_D f \, dA = \int_c^d \left(\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) \, dx \right) dy$$

Théorème – Changement de variables

Soit $F : C \rightarrow D$ un changement de variables lisse, avec $F(\partial C) = \partial D$:

$$\iint_D f(x, y) \, dx \, dy = \iint_C f(F(u, v)) \, |J_F(u, v)| \, du \, dv$$

où $J_F = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}$ est le **jacobien** (déterminant de la matrice jacobienne).

$|J_F|$ est le **facteur de dilatation locale** de l'élément d'aire.

3.2 Systèmes de coordonnées

3.2.1 Coordonnées polaires ($\mathbb{R}^2$)

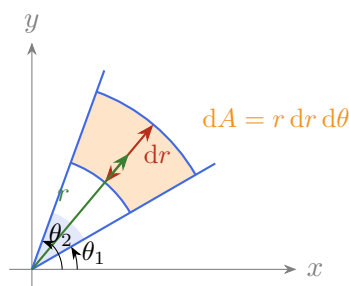
Rappel – Formules polaires

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \quad r \geq 0, \quad \theta \in [0, 2\pi) \quad \boxed{|J_F| = r} \quad dA = r \, dr \, d\theta$$

Inverse : $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\theta = \arctan(y/x)$.

Quand utiliser les polaires :

- L'intégrande contient $x^2 + y^2$.
- Le domaine est un **disque**, un **anneau**, un **secteur angulaire**.
- Symétrie de révolution autour de l'origine.



3.2.2 Coordonnées cylindriques ($\mathbb{R}^3$)

Rappel – Formules cylindriques

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{cases} \quad r \geq 0, \quad \theta \in [0, 2\pi), \quad z \in \mathbb{R} \quad \boxed{|J_F| = r} \quad dV = r \, dr \, d\theta \, dz$$

Quand utiliser : cylindres, cônes, domaines avec symétrie autour de l'axe z .

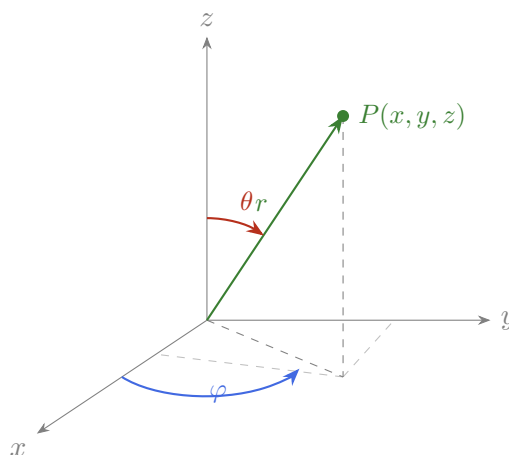
3.2.3 Coordonnées sphériques ($\mathbb{R}^3$)

Rappel – Formules sphériques (convention du cours)

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \theta \end{cases} \quad \boxed{|J_F| = r^2 \sin \theta} \quad dV = r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\varphi$$

- $r \geq 0$: distance à l'origine.
- $\theta \in [0, \pi]$: angle polaire (colatitude, mesuré depuis l'axe $+z$).
- $\varphi \in [0, 2\pi)$: angle azimutal (dans le plan xy).

Quand utiliser : sphères, cônes, domaines avec symétrie radiale complète.



Attention – Convention des angles sphériques

- θ est la **colatitude** (depuis $+z$), PAS la latitude. Donc $\theta \in [0, \pi]$, pas $[-\pi/2, \pi/2]$.
- Certains livres/cours inversent θ et φ . Vérifier la convention utilisée dans **votre** cours.
- **Piège Jacobien** : $r^2 \sin \theta$, pas $r^2 \cos \theta$ ni r^2 .
- Le $\sin \theta$ provient de la colatitude : il vaut 0 aux pôles et 1 à l'équateur.

3.3 Procédures de résolution

Résoudre une intégrale multiple se fait toujours en trois temps : (1) dessiner le domaine et identifier sa géométrie, (2) choisir le système de coordonnées adapté et écrire les bornes, (3) calculer l'intégrale itérée. Le point (2) est de loin le plus délicat.

3.3.1 Intégrale double sur un domaine quelconque

Procédure : Calcul d'une intégrale double $\iint_D f \, dA$

Étape 1 Dessiner le domaine D (croquis indispensable!).

Étape 2 Exploiter les symétries :

- Si D est symétrique par rapport à $x \rightarrow -x$ et f est **impair** en x : $\iint_D f \, dA = 0$.
- Si D est symétrique et f est **pair** : $\iint_D f \, dA = 2 \iint_{D^+} f \, dA$.

Étape 3 Choisir le système de coordonnées :

Indice	Coordonnées à utiliser
$x^2 + y^2$ dans f ou D	Polaires
Domaine rectangulaire	Cartésiennes
Domaine triangulaire/trapèze	Cartésiennes (Fubini)
Domaine annulaire / secteur	Polaires

Étape 4 Déterminer les bornes d'intégration (l'étape la plus délicate) :

- Fixer la variable **extérieure** (bornes constantes si possible).
- La variable **intérieure** a des bornes qui dépendent de la variable extérieure.

Étape 5 Calculer l'intégrale itérée (intégrer de l'intérieur vers l'extérieur).

Étape 6 Ne pas oublier le jacobien si changement de variables (r pour polaires).

Attention – Choix de l'ordre d'intégration

- L'ordre $dy dx$ vs $dx dy$ peut **simplifier drastiquement** le calcul.
- **Critère** : choisir l'ordre qui donne les **bornes les plus simples**.
- **Astuce d'examen** : si l'intégrale intérieure est incalculable, **inverser l'ordre** !

Exemple – Examen Juin 2025, Q6 (intégrale triple avec symétrie)

$\Gamma = \iiint_D (x + y^3 - z) dV$ où D est une sphère de rayon $2a$ privée d'un cône.

Étape 2 (symétrie) : D est symétrique en $x \rightarrow -x$ et $y \rightarrow -y$.

- x est impaire en $x \Rightarrow \iiint_D x dV = 0$.
- y^3 est impaire en $y \Rightarrow \iiint_D y^3 dV = 0$.

Donc $\Gamma = - \iiint_D z dV$.

Étape 3 : Coordonnées sphériques. Le cône d'intersection donne un cercle de rayon a sur la sphère de rayon $2a$, d'où l'angle $\theta_0 = \arcsin\left(\frac{a}{2a}\right) = \frac{\pi}{6}$.

Bornes : $r \in [0, 2a]$, $\theta \in [\pi/6, \pi]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$.

Calcul :

$$\begin{aligned}\Gamma &= - \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\pi/6}^{\pi} \sin \theta \cos \theta d\theta \int_0^{2a} r^3 dr \\ &= -2\pi \cdot \frac{1}{2} [-\cos^2 \theta]_{\pi/6}^{\pi} \cdot \frac{(2a)^4}{4} = -2\pi \cdot \frac{1}{2} \left(-1 + \frac{3}{4}\right) \cdot 4a^4 = \boxed{\pi a^4}\end{aligned}$$

3.3.2 Changement en coordonnées polaires (pas-à-pas)**Procédure : Passage en polaires pour $\iint_D f(x, y) dA$**

Étape 1 Substituer : $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, $x^2 + y^2 = r^2$.

Étape 2 Remplacer $dx dy$ par $r dr d\theta$ (ne pas oublier le r).

Étape 3 Exprimer les bornes :

- Disque centré : $r \in [0, R]$, $\theta \in [0, 2\pi]$.
- Demi-disque $y \geq 0$: $\theta \in [0, \pi]$.
- Quart de disque $x \geq 0, y \geq 0$: $\theta \in [0, \pi/2]$.
- Anneau : $r \in [r_1, r_2]$.
- Cercle décentré $x^2 + y^2 \leq 2ax$: $r \in [0, 2a \cos \theta]$, $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$.

Étape 4 Calculer l'intégrale résultante.

3.3.3 Intégrales triples**Procédure : Calcul d'une intégrale triple $\iiint_D f dV$**

Étape 1 Visualiser le domaine (essentiel ! faire un croquis 3D).

Étape 2 Choisir les coordonnées :

Géométrie du domaine	Coordonnées	Jacobien
Pavé / parallélépipède	Cartésiennes	1
Cylindre / cône (axe z)	Cylindriques	r
Sphère / calotte / cône centré	Sphériques	$r^2 \sin \theta$

Étape 3 Déterminer les bornes dans le système choisi.

Étape 4 Écrire et calculer l'intégrale itérée (3 intégrales emboîtées).

3.3.4 Domaines et bornes classiques

Rappel – Bornes sphériques pour domaines courants

Domaine	r	θ	φ
Sphère complète de rayon R	$[0, R]$	$[0, \pi]$	$[0, 2\pi]$
Demi-sphère $z \geq 0$	$[0, R]$	$[0, \pi/2]$	$[0, 2\pi]$
Cône $\theta \leq \alpha$	$[0, R]$	$[0, \alpha]$	$[0, 2\pi]$
Sphère $\setminus$ cône	$[0, R]$	$[\alpha, \pi]$	$[0, 2\pi]$
Boule creuse $r_1 \leq r \leq r_2$	$[r_1, r_2]$	$[0, \pi]$	$[0, 2\pi]$

Attention – Trouver l'angle du cône en sphériques

Si le cône a pour équation $z^2 = k(x^2 + y^2)$ (soit $\cos^2 \theta = k \sin^2 \theta$), alors :

$$\tan \theta = \frac{1}{\sqrt{k}} \quad \Rightarrow \quad \theta_0 = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$$

Examen 2025 : L'intersection du cône avec la sphère de rayon $2a$ donne un cercle de rayon a , d'où $\sin \theta_0 = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$, soit $\theta_0 = \frac{\pi}{6}$.

3.4 Formules utiles

Rappel – Intégrales de référence

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \, d\theta = \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta \, d\theta = \pi$$

$$\int_0^\pi \sin \theta \, d\theta = 2, \quad \int_0^\pi \sin \theta \cos \theta \, d\theta = 0$$

$$\int_0^{\pi/2} \sin \theta \cos \theta \, d\theta = \frac{1}{2}$$

$$\text{Volume sphère} = \frac{4}{3}\pi R^3 \quad \text{Aire disque} = \pi R^2$$

$$\int_0^R r^n \, dr = \frac{R^{n+1}}{n+1}$$

3.5 Patterns récurrents d'examen (2013–2025)

Statistiques des questions "Intégrales multiples"

I1 Intégrale triple en sphériques : très fréquent (2019, 2020, 2021, 2023, 2025).

- Domaine = sphère $\setminus$ cône, ou calotte sphérique.
- Exploiter les symétries pour simplifier l'intégrande **avant** de calculer.
- Ne pas se tromper sur les bornes de θ (angle du cône).

I2 Intégrale double avec changement de variables : récurrent.

- Passage en polaires pour les domaines circulaires.
- Parfois un changement de variables non standard (donné dans l'énoncé).

I3 Calcul de volume / masse / centre de gravité : régulier.

I4 Argument de symétrie : très apprécié des correcteurs.

- Toujours vérifier si des termes de l'intégrande s'annulent par imparité.
- Écrire la justification rigoureusement (" D est symétrique par rapport à ...et f est impaire en ...").

4 Intégrales curvilignes

On sait désormais intégrer des fonctions sur des domaines 2D et 3D. Mais que se passe-t-il si on veut intégrer *le long d'une courbe* ? C'est exactement ce que font les intégrales curvilignes : elles calculent le **travail** d'un champ de forces le long d'un trajet, ou la **masse** d'un fil de densité variable. Le concept central ici est celui de **champ conservatif** : un champ dont le travail ne dépend pas du chemin suivi, mais uniquement des points de départ et d'arrivée.

4.1 Rappels théoriques

Une courbe dans l'espace se décrit par une paramétrisation. Deux types d'intégrales curvilignes existent : celles de champs scalaires (longueur, masse) et celles de champs vectoriels (travail, circulation).

Définition – Courbe et paramétrisation

Une courbe C est décrite par une **paramétrisation** $\mathbf{x}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ pour $t \in [a, b]$.

- Vecteur tangent : $\mathbf{x}'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$.
- Élément de longueur : $ds = \|\mathbf{x}'(t)\| dt = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt$.
- Longueur totale : $L = \int_a^b \|\mathbf{x}'(t)\| dt$.

Définition – Intégrale curviligne d'un champ scalaire

Si $f(x, y, z)$ est un champ scalaire (ex : densité de masse, température), son intégrale le long de C est :

$$\int_C f ds = \int_a^b f(\mathbf{x}(t)) \|\mathbf{x}'(t)\| dt$$

Remarque : Cette intégrale **ne dépend pas** du sens de parcours de la courbe.

Définition – Intégrale de travail (champ vectoriel)

Si $\mathbf{F}(x, y, z)$ est un champ vectoriel (ex : force, vitesse), la **circulation** ou le **travail** le long de C est :

$$W = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{x}(t)) \cdot \mathbf{x}'(t) dt$$

Remarque : Le travail change de signe si on inverse le sens de parcours : $\int_{-C} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = - \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$.

Définition – Flux d'un champ sur une courbe (2D)

En 2D, on peut s'intéresser au fluide qui "traverse" la courbe C . On définit le vecteur normal unitaire $\mathbf{n} = \pm(x_2'(t), -x_1'(t))/\|\mathbf{x}'(t)\|$. Le **flux** sur le chemin est alors :

n de la courbe

$$\Phi = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{x}(t)) \cdot (\pm x_2'(t), \mp x_1'(t)) dt$$

+ ou - pour forcer le +

Définition – Champs vectoriels conservatifs

Un champ vectoriel $\mathbf{F}$ est dit **conservatif** sur un domaine D s'il **dérive d'un potentiel scalaire** g , c'est-à-dire si :

$$\mathbf{F} = \nabla g \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{F} = \left(\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}, \frac{\partial g}{\partial z} \right)$$

Théorème – Théorème de Poincaré (Lemme de Poincaré)

Énoncé : Si un champ vectoriel $\mathbf{F}$ est de classe C^1 sur un domaine D , alors sous certaines conditions :

$$\mathbf{F} \text{ est conservatif sur } D \iff \operatorname{curl} \mathbf{F} = \mathbf{0} \text{ partout sur } D$$

En 2D pour $\mathbf{F} = (P, Q)$, la condition du rotationnel devient $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$.

Condition d'application CRUCIALE (Simple connexité) : Le domaine D doit être ouvert et simplement connexe. Concrètement, cela signifie que D ne doit pas avoir de "trou" qui traverse le domaine de part en part. Toute boucle fermée dans D doit pouvoir être rétrécie continûment jusqu'à un point sans sortir de D .

- **En 2D :** D ne doit pas avoir de point manquant ou de trou (ex : $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ n'est pas simplement connexe).
- **En 3D :** D ne doit pas avoir de "trous infinis" comme un axe entier manquant (ex : un cylindre évidé n'est pas simplement connexe, mais une sphère creuse l'est, car toute boucle peut glisser autour du trou central).

Quand l'utiliser ? Pour prouver formellement qu'un champ est conservatif **avant** de perdre du temps à chercher son potentiel. Si $\operatorname{curl} \mathbf{F} \neq \mathbf{0}$, le champ n'est pas conservatif, point final.

Exemple – Théorème de Poincaré et piège du domaine

Problème. Le champ vortex $\mathbf{F}(x, y) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$ est-il conservatif sur $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$?

Raisonnement. On calcule le rotationnel (en 2D : $\partial Q/\partial x - \partial P/\partial y$) :

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{1(x^2 + y^2) - x(2x)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{-1(x^2 + y^2) - (-y)(2y)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

On observe que $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$, donc le rotationnel est nul sur tout D .

Pourtant, le champ N'EST PAS conservatif ! Pourquoi ? Parce que le domaine $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ (le plan privé de l'origine) **n'est pas simplement connexe**. Il a un trou en $(0,0)$. La preuve ? Calculons le travail sur le cercle $C : x^2 + y^2 = 1$ parcouru dans le sens anti-horaire :

$$x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad dx = -\sin t \, dt, \quad dy = \cos t \, dt$$

$$\oint_C P \, dx + Q \, dy = \int_0^{2\pi} (-\sin t)(-\sin t \, dt) + (\cos t)(\cos t \, dt) = \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t) \, dt = 2\pi$$

Si le champ était conservatif, l'intégrale sur une boucle fermée serait 0.

Leçon d'examen : Un rotationnel nul est une condition **nécessaire mais pas suffisante** s'il y a un trou dans le domaine. Le théorème de Poincaré nécessite absolument un domaine simplement connexe.

Théorème – Théorème fondamental des intégrales curvilignes

Formule : Si $\mathbf{F}$ est un champ conservatif de potentiel g ($\mathbf{F} = \nabla g$), alors l'intégrale de travail le long de toute courbe C allant du point A au point B ne dépend **que des extrémités** :

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \nabla g \cdot d\mathbf{r} = g(B) - g(A)$$

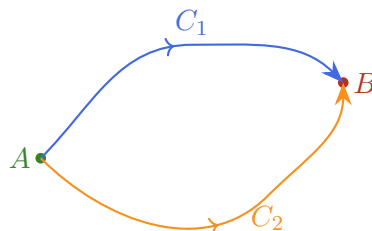
Corollaire : Si C est une courbe **fermée** (boucle), alors $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$.

Conditions d'application :

- Le champ $\mathbf{F}$ doit être **conservatif** (il dérive d'un potentiel : $\mathbf{F} = \nabla g$).

- Le domaine de $\mathbf{F}$ doit être **ouvert et simplement connexe** (pas de "trous" 2D ou d'axes de singularité en 3D).
- Le potentiel g et le champ $\mathbf{F}$ doivent être de classe C^1 .

Quand l'utiliser ? Lorsqu'on vous demande de calculer le travail (la circulation) d'un champ le long d'une courbe **ouverte** très compliquée, mais que le rotationnel de $\mathbf{F}$ est nul. Dans ce cas, l'intégrale ne dépend pas du chemin : calculez le potentiel g et évaluez-le aux extrémités A et B .



$$\text{Si } \mathbf{F} = \nabla g : \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = g(B) - g(A)$$

Exemple – Théorème fondamental : travail sur une hélice (champ conservatif)

Problème. Calculer le travail $W = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ où $\mathbf{F}(x, y, z) = (2xy + z^2, x^2 + 2yz, 2xz + y^2)$ et C est l'hélice $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t, t)$ pour $t \in [0, 2\pi]$ (de $A = (1, 0, 0)$ à $B = (1, 0, 2\pi)$).

Raisonnement. La courbe est une hélice : la paramétrer et calculer le produit $\mathbf{F} \cdot \mathbf{r}'(t)$ donnerait un intégrande monstrueux en $\sin$, $\cos$, t , t^2 . On vérifie d'abord si le champ est conservatif.

Étape 1 : Vérifier que $\text{curl } \mathbf{F} = \mathbf{0}$.

Avec $P = 2xy + z^2$, $Q = x^2 + 2yz$, $R = 2xz + y^2$:

$$\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = 2y - 2y = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = 2z - 2z = 0, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 2x - 2x = 0$$

$\text{curl } \mathbf{F} = \mathbf{0}$ partout $\Rightarrow \mathbf{F}$ est **conservatif** sur $\mathbb{R}^3$ (simplement connexe). ✓

Étape 2 : Trouver le potentiel g tel que $\nabla g = \mathbf{F}$.

Par inspection : on cherche g tel que $\frac{\partial g}{\partial x} = 2xy + z^2$. En intégrant par rapport à x :

$$g = x^2y + xz^2 + \varphi(y, z)$$

Dérivons par rapport à y : $\frac{\partial g}{\partial y} = x^2 + \varphi'_y(y, z)$. On veut $x^2 + 2yz$, donc $\varphi'_y = 2yz$, ce qui donne $\varphi = y^2z + \psi(z)$.

Dérivons par rapport à z : $\frac{\partial g}{\partial z} = 2xz + y^2 + \psi'(z)$. On veut $2xz + y^2$, donc $\psi'(z) = 0$, soit $\psi = C$.

$$\boxed{g(x, y, z) = x^2y + xz^2 + y^2z}$$

Étape 3 : Appliquer le théorème fondamental.

$$W = \boxed{g(B) - g(A)} = g(1, 0, 2\pi) - g(1, 0, 0) = (0 + 4\pi^2 + 0) - (0 + 0 + 0) = \boxed{4\pi^2}$$

Réflexe d'examen : Si la courbe est compliquée (hélice, spirale, courbe exponentielle...) mais que le champ est un polynôme "bien structuré", c'est **presque toujours** un signal que le champ est conservatif. Vérifiez $\text{curl } \mathbf{F} = \mathbf{0}$, trouvez le potentiel, et évaluez aux bornes. Trois lignes au lieu d'une page de calcul.

4.2 Procédures de résolution

Deux grandes stratégies s'offrent à vous face à une intégrale curviligne : le calcul direct (paramétriser la courbe et calculer) ou la voie royale du potentiel scalaire (si le champ est conservatif, tout se simplifie en une soustraction).

4.2.1 Calcul direct d'un travail (paramétrisation)

Procédure : Calcul d'une intégrale $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ par paramétrisation

À utiliser si le champ **n'est pas conservatif** (ou si l'énoncé l'impose).

Étape 1 Paramétrer la courbe C : trouver $\mathbf{x}(t)$ pour $t \in [a, b]$.

- Segment AB : $\mathbf{x}(t) = A + t(B - A)$ pour $t \in [0, 1]$.
- Cercle centré en 0 de rayon R : $\mathbf{x}(t) = (R \cos t, R \sin t)$ pour $t \in [0, 2\pi]$.
- Graphe $y = f(x)$: $\mathbf{x}(t) = (t, f(t))$ pour $t \in [x_A, x_B]$.

Étape 2 Calculer le vecteur tangent $\mathbf{x}'(t) = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right)$.

Étape 3 Substituer dans l'expression du champ : $\mathbf{F}(\mathbf{x}(t))$.

Étape 4 Faire le produit scalaire : $\mathbf{F} \cdot \mathbf{x}'(t)$.

Étape 5 Intégrer par rapport à t : $W = \int_a^b [\mathbf{F}(\mathbf{x}(t)) \cdot \mathbf{x}'(t)] dt$.

Attention – Orientation de la courbe

L'ordre des bornes d'intégration dicte le sens de parcours. Si la courbe va de A à B , les bornes doivent vérifier $\mathbf{x}(a) = A$ et $\mathbf{x}(b) = B$.

4.2.2 Champs conservatifs : définition et calcul du potentiel

Définition – Champ conservatif et Potentiel scalaire

Un champ vectoriel $\mathbf{F} = (P, Q, R)$ est dit **conservatif** s'il dérive d'un champ scalaire g appelé **potentiel scalaire**. C'est-à-dire si :

$$\mathbf{F} = \nabla g \iff (P, Q, R) = \left(\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}, \frac{\partial g}{\partial z}\right)$$

Le potentiel $g(x, y, z)$ est l'analogue direct de la primitive pour les fonctions à plusieurs variables.

Définition – Forme différentielle exacte

L'expression $P dx + Q dy + R dz$ est appelée **forme différentielle**. Elle est dite **exacte** si et seulement si le champ vectoriel $\mathbf{F} = (P, Q, R)$ est conservatif. Dans ce cas, la forme correspond à la différentielle totale du potentiel : $dg = P dx + Q dy + R dz$.

Astuce – Calcul du potentiel par inspection (méthode la plus rapide)

Pour des champs structurés, on peut "deviner" le potentiel g directement **par inspection** sans faire de calcul d'intégrales croisées, ce qui fait gagner énormément de temps. **Exemple d'examen :** $\mathbf{F} = ((1+x)e^{x+y}, xe^{x+y} + 2y, -2z)$.

- La composante z est $-2z$, qui est la dérivée de $-z^2$.
- La composante y contient $2y$, qui est la dérivée de y^2 .
- Le groupe avec l'exponentielle vient de la dérivation du produit $x \cdot e^{x+y}$. En effet, $\partial_x(xe^{x+y}) = e^{x+y} + xe^{x+y}$ et $\partial_y(xe^{x+y}) = xe^{x+y}$.

Par inspection directe, on pose l'assemblage : $g(x, y, z) = xe^{x+y} + y^2 - z^2$. On vérifie mentalement que $\nabla g = \mathbf{F}$ et on passe à la question suivante !

Si l'inspection est trop difficile, appliquez la méthode systématique :

Procédure : Vérifier si un champ est conservatif et trouver son potentiel

Soit $\mathbf{F} = (P, Q, R)$. On veut montrer qu'il existe g tel que $\nabla g = \mathbf{F}$.

Étape 1 Vérifier la condition nécessaire ($\text{curl } \mathbf{F} = \mathbf{0}$) :

$$\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

Note : Si le domaine est $\mathbb{R}^3$ (simplement connexe), c'est suffisant.

Étape 2 Intégrer la première composante : $\frac{\partial g}{\partial x} = P \implies g(x, y, z) = \int P \, dx + h(y, z)$ où $h(y, z)$ est une **constante d'intégration par rapport à x** .

Étape 3 Dériver par rapport à y et égaler à Q : $\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\int P \, dx \right) + \frac{\partial h}{\partial y} = Q \implies \frac{\partial h}{\partial y} = \dots$
Intégrer par rapport à y pour trouver $h(y, z) = \dots + k(z)$.

Étape 4 Dériver par rapport à z et égaler à R : Identifier $k'(z)$ et l'intégrer pour trouver la constante (à C près).

Étape 5 Conclure : écrire le potentiel final $g(x, y, z)$.

Exemple – Examen 2019, Q4b (Potentiel scalaire)

Soit $\mathbf{F}(x, y, z) = (2xy, x^2 + 2yz, y^2 + 1)$. Calculer le potentiel scalaire g .

1. $P = 2xy \implies g = \int 2xy \, dx = x^2y + h(y, z)$.

2. Dérivons par rapport à y : $\frac{\partial g}{\partial y} = x^2 + \frac{\partial h}{\partial y}$. On égale à Q : $x^2 + \frac{\partial h}{\partial y} = x^2 + 2yz \implies \frac{\partial h}{\partial y} = 2yz$.
On intègre selon y : $h(y, z) = y^2z + k(z)$. Donc $g = x^2y + y^2z + k(z)$.

3. Dérivons par rapport à z : $\frac{\partial g}{\partial z} = y^2 + k'(z)$. On égale à R : $y^2 + k'(z) = y^2 + 1 \implies k'(z) = 1 \implies k(z) = z + C$.

Conclusion : $g(x, y, z) = x^2y + y^2z + z + C$.

4.2.3 Calcul de travail via le potentiel

Procédure : Calculer un travail avec le potentiel

Si $\mathbf{F}$ est **difficile à intégrer directement** mais qu'il est **conservatif** :

Étape 1 Trouver le potentiel g (Procédure précédente).

Étape 2 Identifier les points de départ $A = \mathbf{x}(a)$ et d'arrivée $B = \mathbf{x}(b)$ de la courbe.

Étape 3 Appliquer le théorème fondamental : $W = g(B) - g(A)$.

Remarque : la forme de la courbe n'a **aucune importance** !

4.3 Patterns récurrents d'examen (2013–2025)

Statistiques des questions “Intégrales curvilignes”

- C1 Prouver qu'un champ est conservatif et trouver son potentiel** : Classique et très fréquent (ex : 2018, 2019, 2021). Suivre strictement la Procédure 2 en intégrant composante par composante.
- C2 Calcul d'un travail sur une courbe farfelue** : Dès que la paramétrisation semble impossible à calculer (ex : courbe en hélice exponentielle), **c'est que le champ est conservatif**. → Trouver le potentiel, évaluer aux bornes (ex : 2022).
- C3 Travail d'un champ $F + H$** : L'examen 2024 (et 2017) demande de calculer $\int (F + H) dr$ où F est conservatif, mais H est simple. → Séparer l'intégrale : $\int F$ via le potentiel (très rapide), et $\int H$ via paramétrisation directe.
- C4 Utiliser Green/Stokes plutôt que le calcul direct** : Si la courbe est fermée et que le champ n'est pas conservatif, la question appelle souvent l'utilisation des théorèmes intégraux (voir Chapitre 6).

5 Intégrales de surface et Flux

Si les intégrales curvilignes mesurent “combien un champ pousse le long d’une courbe” (travail), les intégrales de surface mesurent “combien un champ traverse une surface” (flux). C’est la quantité physique fondamentale en électromagnétisme (flux de $\mathbf{E}$ à travers une surface fermée $\rightarrow$ loi de Gauss) et en mécanique des fluides (débit à travers une section). La difficulté technique réside dans la **paramétrisation de la surface** et le calcul du **vecteur normal**.

5.1 Rappels théoriques

Une surface dans $\mathbb{R}^3$ est paramétrée par deux variables. Le vecteur normal, obtenu par produit vectoriel des tangentes, joue un rôle central dans le calcul du flux.

Définition – Surface paramétrée et normale

Une surface S dans $\mathbb{R}^3$ peut être paramétrisée par deux variables (u, v) dans un domaine $D \subset \mathbb{R}^2$:

$$\mathbf{x}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \quad \text{pour } (u, v) \in D$$

Les **vecteurs tangents** à la surface sont $\mathbf{x}_u = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u}$ et $\mathbf{x}_v = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}$.

Le **vecteur normal** (non unitaire) à la surface est donné par le produit vectoriel :

$$\mathbf{N}(u, v) = \mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v$$

L’élément de surface est $d\sigma = \|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\| du dv$.

Définition – Aire d’une surface

L’aire de la surface S s’obtient en intégrant la norme du vecteur normal sur le domaine D des paramètres :

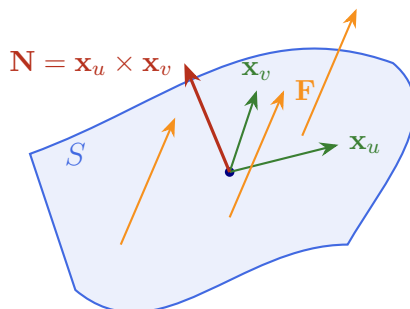
$$\text{Aire}(S) = \iint_S d\sigma = \iint_D \|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\| du dv$$

Définition – Flux d’un champ vectoriel

Soit $\mathbf{F}(x, y, z)$ un champ vectoriel. Le **flux** Φ de $\mathbf{F}$ à travers S (orientée par $\mathbf{N}$) est :

$$\Phi = \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma = \iint_D \mathbf{F}(\mathbf{x}(u, v)) \cdot (\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v) du dv$$

où $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{N}}{\|\mathbf{N}\|}$ est la normale unitaire.



5.2 Paramétrisations classiques (À retenir par cœur)

La réussite d'un exercice de flux repose à 80% sur le choix de la bonne paramétrisation. Voici les trois grandes familles de surfaces que vous rencontrerez systématiquement à l'examen.

Rappel – 1. Le graphe d'une fonction $z = f(x, y)$

La surface est donnée par une équation cartésienne $z = f(x, y)$ sur un domaine D_{xy} .

- Paramétrisation : $\mathbf{x}(x, y) = (x, y, f(x, y))$
- Tangentes : $\mathbf{x}_x = (1, 0, f_x)$, $\mathbf{x}_y = (0, 1, f_y)$
- Normale : $\mathbf{N} = \mathbf{x}_x \times \mathbf{x}_y = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1 \right)$ (pointe vers le **haut** car $N_z = 1 > 0$).
- Élément de surface :

$$dS = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} dx dy$$

Rappel – 2. Le cylindre d'axe z et de rayon R

- Paramétrisation : $\mathbf{x}(\theta, z) = (R \cos \theta, R \sin \theta, z)$
- Normale : $\mathbf{N} = \mathbf{x}_\theta \times \mathbf{x}_z = (R \cos \theta, R \sin \theta, 0)$ (pointe vers l'**extérieur**).
- Élément d'aire : $d\sigma = R d\theta dz$.

Rappel – 3. La sphère de rayon R

- Paramétrisation : $\mathbf{x}(\theta, \varphi) = (R \sin \theta \cos \varphi, R \sin \theta \sin \varphi, R \cos \theta)$
- Normale : $\mathbf{N} = \mathbf{x}_\theta \times \mathbf{x}_\varphi = R \sin \theta \cdot \mathbf{x}(\theta, \varphi)$ (pointe vers l'**extérieur**).
- Élément d'aire : $d\sigma = R^2 \sin \theta d\theta d\varphi$.

5.3 Procédures de résolution

5.3.1 Calcul direct d'un flux

Procédure : Calculer le flux $\Phi = \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma$

À utiliser si la surface n'est pas fermée, ou si les théorèmes intégraux ne s'appliquent pas.

Étape 1 Paramétrer la surface S avec (u, v) et définir le domaine D des paramètres.

Étape 2 Calculer le vecteur normal $\mathbf{N} = \mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v$.

Étape 3 Vérifier l'orientation !

- L'énoncé précise "vers le haut" $\Rightarrow$ vérifier que la composante z de $\mathbf{N}$ est positive.
- "Sortante" $\Rightarrow$ $\mathbf{N}$ doit pointer vers l'extérieur du volume.
- Si l'orientation est mauvaise, prendre $-\mathbf{N}$.

Étape 4 Substituer la paramétrisation dans $\mathbf{F} : \mathbf{F}(\mathbf{x}(u, v))$.

Étape 5 Faire le produit scalaire : $h(u, v) = \mathbf{F}(\mathbf{x}(u, v)) \cdot \mathbf{N}(u, v)$.

Étape 6 Calculer l'intégrale double : $\Phi = \iint_D h(u, v) du dv$.

Attention – Le piège du vecteur normal unitaire

Ne **surtout pas** normaliser $\mathbf{N}$ (ne pas diviser par sa norme) pour calculer le flux ! En effet, $\mathbf{n} d\sigma = \left(\frac{\mathbf{N}}{\|\mathbf{N}\|} \right) \|\mathbf{N}\| du dv = \mathbf{N} du dv$. La norme se simplifie. Diviser par la norme va créer des racines carrées impossibles à intégrer.

Astuce – Notation dS ultra-rapide pour un graphe $z = f(x, y)$

Pour calculer le flux Φ d'un champ $\mathbf{E}$ à travers une surface S donnée par $z = f(x, y)$, on peut compacter l'écriture en utilisant le **vecteur normal élémentaire** $d\mathbf{S} = \mathbf{n} dS$.

Pour une surface orientée vers les z croissants (la composante en z vaut $1 > 0$), il est donné directement par :

$$d\mathbf{S} = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1 \right) dx dy$$

Le flux s'écrit alors très simplement : $\Phi = \iint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \iint_D \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$

Exemple express : Soit le champ $\mathbf{E}(x, y, z) = (-x, y, x^2 + y^2)$ à travers le parabolôïde $z = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}$. On a immédiatement $d\mathbf{S} = (-x, -y, 1) dx dy$. Le produit scalaire est instantané : $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = (-x)(-x) + (y)(-y) + (x^2 + y^2)(1) = 2x^2$. Il ne reste qu'à intégrer $\iint_D 2x^2 dx dy$! C'est la méthode la plus rapide à l'examen.

Exemple – Examen 2020 (Flux à travers un parabolôïde)

Calculer le flux de $\mathbf{F} = (x, y, z)$ à travers $S : z = 1 - x^2 - y^2$ pour $z \geq 0$, orienté vers le haut.

1. Paramétrisation : S est un graphe $z = f(x, y)$. Le domaine D_{xy} est l'ombre de S sur le plan $z = 0$, soit $x^2 + y^2 \leq 1$ (un disque).

2 & 3. Normale : $\mathbf{N} = (-f_x, -f_y, 1) = (2x, 2y, 1)$. Composante $z = 1 > 0$, donc orienté vers le haut (OK).

4 & 5. Produit scalaire : $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = (x, y, 1 - x^2 - y^2)$. $\mathbf{F} \cdot \mathbf{N} = (x)(2x) + (y)(2y) + (1 - x^2 - y^2)(1) = 2x^2 + 2y^2 + 1 - x^2 - y^2 = x^2 + y^2 + 1$.

6. Intégrale double : $\Phi = \iint_{x^2+y^2 \leq 1} (x^2 + y^2 + 1) dx dy$.

Passage en polaires : $\Phi = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (r^2 + 1) r dr = 2\pi \left[\frac{r^4}{4} + \frac{r^2}{2} \right]_0^1 = 2\pi \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \right) = \boxed{\frac{3\pi}{2}}$.

5.3.2 Calcul de l'aire d'une surface**Procédure : Calculer l'aire $\iint_S d\sigma$**

Étape 1 Paramétrer S et trouver le domaine D (les bornes).

Étape 2 Calculer $\mathbf{N} = \mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v$.

Étape 3 Calculer la norme $\|\mathbf{N}\| = \sqrt{N_x^2 + N_y^2 + N_z^2}$.

Étape 4 Intégrer $\iint_D \|\mathbf{N}\| du dv$.

(Si S est un graphe $z = f(x, y)$, on a directement $\iint_D \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1} dx dy$).

5.4 Patterns récurrents d'examen (2013–2025)**Statistiques des questions "Flux et Surfaces"**

F1 Calcul de flux à travers une surface OUVERTE : Exige le calcul direct (Procédure 1). Souvent un cône ou un parabolôïde (ex : 2020, 2021). Il est crucial de **bien choisir la normale** selon l'énoncé.

F2 Calcul de flux à travers une surface FERMÉE : L'énoncé demande "le flux sortant de S délimitant un volume V ". C'est un appel déguisé au **Théorème de la Divergence (Gauss)** (voir Chapitre 6). *Ne calculez presque jamais un flux fermé directement !*

F3 Fermer une surface manuellement : L'examen demande le flux à travers une surface

ouverte (ex : cloche parabolique), mais le calcul direct est trop dur. → Astuce : Ajouter un "couvercle" S_2 pour fermer le volume, utiliser Gauss sur $V = S_1 \cup S_2$, puis soustraire le flux très facile à travers le couvercle plat. (Examen 2024).

F4 Le flux nul par symétrie : Si D est symétrique et la fonction $\mathbf{F} \cdot \mathbf{N}$ est impaire, le flux est nul (le justifier proprement !).

6 Théorèmes intégraux

Voici le sommet du cours : les trois grands théorèmes qui relient les intégrales entre elles. Green relie une intégrale curviligne 2D à une intégrale double. Stokes relie une intégrale curviligne 3D à un flux de surface. Et Gauss (Divergence) relie un flux à travers une surface fermée à une intégrale de volume. Ces théorèmes transforment des calculs impossibles en calculs triviaux — à condition de savoir *lequel* utiliser et *quand*. C'est précisément l'objet de ce chapitre.

6.1 Opérateurs différentiels (Nabla)

Avant d'énoncer les théorèmes, il faut maîtriser les opérateurs différentiels qui y apparaissent. Ils sont tous construits à partir du vecteur ∇ ("nabla").

L'opérateur **Nabla** est défini comme un vecteur de dérivées partielles : $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$.

Rappel – Divergence et Rotationnel

Soit un champ vectoriel $\mathbf{F} = (P, Q, R)$.

— **Divergence** (scalaire) : $\operatorname{div} \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$.

— **Rotationnel** (vecteur) : $\operatorname{curl} \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)$.

— **Laplacien** d'une fonction scalaire f : $\Delta f = \operatorname{div}(\nabla f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$.

Interprétations physiques :

- $\operatorname{div} \mathbf{F} > 0$: Le point est une **source** (le fluide se dilate, flux sortant). Si $\operatorname{div} \mathbf{F} = 0$, le fluide est incompressible.
- $\operatorname{curl} \mathbf{F} \neq \mathbf{0}$: Le champ a une tendance à **tourner** autour du point (tourbillon). S'il est nul, le champ est irrotationnel.

Rappel – Identités différentielles vectorielles

Il existe 9 identités remarquables combinant ces opérateurs qu'il est bon de savoir démontrer (souvent demandées en théorie) :

1. $\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$
2. $\operatorname{div}(f\mathbf{G}) = f \operatorname{div}(\mathbf{G}) + \mathbf{G} \cdot \nabla f$
3. $\operatorname{div}(\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \operatorname{curl}(\mathbf{F}) \cdot \mathbf{G} - \mathbf{F} \cdot \operatorname{curl}(\mathbf{G})$
4. $\operatorname{curl}(f\mathbf{G}) = f \operatorname{curl}(\mathbf{G}) + \nabla f \times \mathbf{G}$
5. $\operatorname{curl}(\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \operatorname{div}(\mathbf{G})\mathbf{F} + \mathbf{G} \cdot \nabla \mathbf{F} - (\operatorname{div}(\mathbf{F})\mathbf{G} + \mathbf{F} \cdot \nabla \mathbf{G})$
6. $\nabla(\mathbf{F} \cdot \mathbf{G}) = \mathbf{F} \times \operatorname{curl}(\mathbf{G}) + \mathbf{G} \times \operatorname{curl}(\mathbf{F}) + \mathbf{F} \cdot \nabla \mathbf{G} + \mathbf{G} \cdot \nabla \mathbf{F}$
7. $\operatorname{curl}(\operatorname{curl}(\mathbf{F})) = \nabla(\operatorname{div}(\mathbf{F})) - \Delta \mathbf{F}$
8. $\Delta(fg) = f\Delta g + 2\nabla f \cdot \nabla g + g\Delta f$
9. $\operatorname{div}(\nabla f \times \nabla g) = 0$

Rappel des propriétés d'annulation : $\operatorname{div}(\operatorname{curl} \mathbf{F}) = 0$ et $\operatorname{curl}(\nabla f) = \mathbf{0}$.

6.2 Théorèmes en dimension 2

Ces théorèmes lient une intégrale double sur un domaine plan D à une intégrale curviligne sur son bord ∂D . Le bord ∂D doit **toujours** être orienté de sorte que le domaine D reste **à gauche** quand on le parcourt (sens anti-horaire si D est plein).

Théorème – Théorème de Green (Circulation 2D)

Formule : Pour $\mathbf{F} = (P, Q)$ dans $\mathbb{R}^2$:

$$\oint_{\partial D} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint_{\partial D} (P dx + Q dy) = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA$$

L'intégrande de droite est la composante z du rotationnel : $(\text{curl } \mathbf{F})_z$.

Conditions d'application :

- Le domaine plan $D \subset \mathbb{R}^2$ doit être régulier.
- La courbe frontière ∂D doit être **fermée et orientée dans le sens anti-horaire** (sens trigonométrique, en gardant le domaine à sa gauche).
- Le champ $\mathbf{F} = (P, Q)$ doit être de classe C^1 sur D .

Quand l'utiliser ?

- Calculer la circulation d'un champ non conservatif sur une **courbe fermée plane** (souvent, l'intégrale double de $\partial Q/\partial x - \partial P/\partial y$ est extrêmement simple, voire constante).
- Calculer l'**aire d'un domaine** D géométriquement complexe à l'aide d'une intégrale curviligne sur ses bords (astuce du planimètre : utiliser $\mathbf{F} = (-y/2, x/2)$).

Théorème – Théorème de la Divergence 2D (Flux extérieur)

Formule : Pour $\mathbf{F} = (P, Q)$ dans $\mathbb{R}^2$, avec $\mathbf{n}$ la **normale extérieure unitaire** au bord :

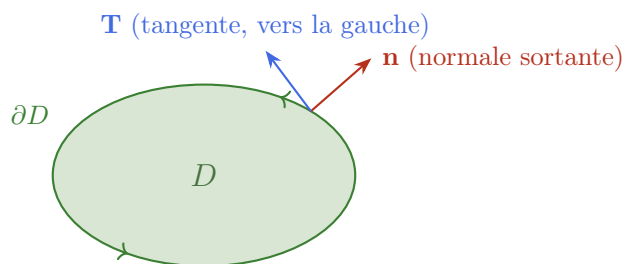
$$\oint_{\partial D} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds = \oint_{\partial D} (P dy - Q dx) = \iint_D (\text{div } \mathbf{F}) dA$$

Conditions d'application :

- Le domaine plan $D \subset \mathbb{R}^2$ doit être régulier.
- La courbe frontière ∂D doit être **fermée**. Le vecteur normal $\mathbf{n}$ doit obligatoirement pointer vers l'**extérieur** du domaine D .
- Le champ $\mathbf{F} = (P, Q)$ doit être de classe C^1 sur D .

Quand l'utiliser ?

- Calculer le **flux sortant** (en 2D) d'un champ vectoriel à travers une courbe fermée, en particulier lorsque sa divergence ($\text{div } \mathbf{F} = \partial P/\partial x + \partial Q/\partial y$) est très simple ou constante.
- Éviter de calculer des intégrales de flux sur des bords complexes (par exemple un domaine délimité par 3 ou 4 courbes différentes), en remplaçant par une seule intégrale double.



Convention : D est "à gauche" de $\mathbf{T}$. $\mathbf{n}$ pointe vers l'extérieur.

Exemple – Green : calcul d'aire par le planimètre

Problème. Calculer l'aire du domaine D délimité par l'ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Raisonnement. On exploite une conséquence directe de Green : en choisissant astucieusement $\mathbf{F}$, on peut transformer une intégrale double (aire) en intégrale curviligne (bord).

Étape 1 : Choix de F . Prenons $P = -y/2$ et $Q = x/2$. Alors :

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) = 1$$

Donc Green donne directement :

$$\text{Aire}(D) = \iint_D 1 \, dA = \oint_{\partial D} \left(-\frac{y}{2} dx + \frac{x}{2} dy\right)$$

Étape 2 : Paramétrisation de l'ellipse.

$$x = a \cos t, \quad y = b \sin t, \quad t \in [0, 2\pi]$$

$$dx = -a \sin t \, dt, \quad dy = b \cos t \, dt$$

Étape 3 : Calcul.

$$\text{Aire} = \int_0^{2\pi} \left(-\frac{b \sin t}{2}(-a \sin t) + \frac{a \cos t}{2}(b \cos t)\right) dt = \int_0^{2\pi} \frac{ab}{2}(\sin^2 t + \cos^2 t) dt = \frac{ab}{2} \cdot 2\pi = \boxed{\pi ab}$$

Pourquoi Green ici ? Le calcul direct de l'intégrale double sur l'ellipse est faisable, mais l'astuce du planimètre est plus élégante et donne une formule universelle. C'est un réflexe classique d'examen.

Exemple – Green : circulation d'un champ non conservatif

Problème. Calculer $\oint_C (x^2 y) dx + (xy^2) dy$ où C est le cercle $x^2 + y^2 = 1$ parcouru dans le sens anti-horaire.

Raisonnement. La courbe C est fermée et plane $\Rightarrow$ on pense immédiatement à **Green**.

Étape 1 : Identifier P et Q . $P = x^2 y$ et $Q = xy^2$.

Étape 2 : Calculer le rotationnel $2D$.

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = y^2 - x^2$$

Étape 3 : Appliquer Green.

$$\oint_C P dx + Q dy = \iint_D (y^2 - x^2) dA$$

où D est le disque $x^2 + y^2 \leq 1$.

Étape 4 : Passer en coordonnées polaires (le domaine est un disque!). $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, $dA = r dr d\theta$.

$$y^2 - x^2 = r^2 \sin^2 \theta - r^2 \cos^2 \theta = -r^2 \cos(2\theta)$$

$$\iint_D (y^2 - x^2) dA = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (-r^2 \cos 2\theta) r dr d\theta = - \int_0^{2\pi} \cos(2\theta) d\theta \cdot \int_0^1 r^3 dr$$

Étape 5 : Conclure. $\int_0^{2\pi} \cos(2\theta) d\theta = 0$ (intégrale d'un cosinus sur une période complète).

Donc : $\boxed{\oint_C x^2 y dx + xy^2 dy = 0}$.

Attention : $\oint = 0$ ne signifie **pas** que le champ est conservatif ! Ici $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = y^2 - x^2 \neq 0$, le champ n'est pas conservatif. C'est la symétrie du domaine (le disque) qui annule l'intégrale. Ne confondez pas les deux !

6.3 Théorèmes en dimension 3

Théorème – Théorème de la Divergence / Gauss (Flux 3D vers Volume)

Formule : Relie une intégrale de volume V à une intégrale de flux sur la surface **fermée** ∂V (bord du volume). La surface ∂V doit être orientée par la normale **sortante** $\mathbf{n}_{ext}$.

$$\oiint_{\partial V} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_{ext} d\sigma = \iiint_V (\operatorname{div} \mathbf{F}) dV$$

Conditions d'application :

- Le volume $V \subset \mathbb{R}^3$ doit être un domaine régulier et compact (sans trous infinis).
- La surface ∂V doit être **entièrement fermée** autour du volume V .
- Le vecteur normal $\mathbf{n}_{ext}$ doit être orienté **vers l'extérieur** de V .
- Le champ $\mathbf{F}$ doit être de classe C^1 **partout à l'intérieur** du volume V (attention aux singularités type $\mathbf{F} = \mathbf{r}/r^3$ à l'origine).

Quand l'utiliser ?

- Calculer un flux sortant hyper-compliqué sur une **surface fermée** (sphère complète, ellipsoïde, cylindre complet avec ses deux couvercles). Souvent, la divergence du champ $\operatorname{div} \mathbf{F}$ se simplifie en une magnifique constante!
- **Astuce "fermeture" d'examen :** si on vous demande le flux sur une surface **ouverte** (ex : une cloche hyperbolique sans sa base) et que le calcul direct est horrible, **ajoutez un couvercle** S_{base} pour utiliser Gauss sur le volume fermé, puis soustrayez le flux (très facile) à travers le couvercle : $\Phi_{cloche} = \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{F} dV - \Phi_{base}$.

Exemple – Gauss : flux à travers une sphère (divergence constante)

Problème. Calculer le flux sortant de $\mathbf{F} = (x + yz, y + xz, z + xy)$ à travers la sphère $S : x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

Raisonnement. S est une surface **fermée** (sphère complète) $\Rightarrow$ réflexe **Gauss**.

Étape 1 : Calculer la divergence.

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}(x + yz) + \frac{\partial}{\partial y}(y + xz) + \frac{\partial}{\partial z}(z + xy) = 1 + 1 + 1 = 3$$

La divergence est une **constante**! C'est le cas rêvé.

Étape 2 : Appliquer Gauss.

$$\oiint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_{ext} d\sigma = \iiint_V (\operatorname{div} \mathbf{F}) dV = \iiint_V 3 dV = 3 \cdot \operatorname{Vol}(V)$$

Étape 3 : Volume de la boule. La boule V a pour rayon $R = 2$, donc $\operatorname{Vol}(V) = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi(8) = \frac{32\pi}{3}$.

Résultat : $\Phi = 3 \cdot \frac{32\pi}{3} = 32\pi$

Pourquoi Gauss ? Le calcul direct du flux nécessiterait de paramétrer la sphère en coordonnées sphériques, de calculer le produit scalaire $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}$ sur toute la surface, puis d'intégrer un polynôme en $\sin \phi, \cos \phi, \theta$. Gauss réduit tout ça à "3 × volume", soit un calcul de 3 lignes.

Exemple – Gauss : astuce de fermeture (paraboloïde ouvert)

Problème. Calculer le flux sortant de $\mathbf{F} = (x, y, z^2)$ à travers le paraboloïde $S_1 : z = 4 - x^2 - y^2$ pour $z \geq 0$, orienté par la normale extérieure (vers le haut).

Raisonnement. S_1 est une surface **ouverte** (un bol sans son fond). On va la **fermer** avec un disque plat.

Étape 1 : Divergence.

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = 1 + 1 + 2z = 2 + 2z$$

Étape 2 : Fermer la surface. Le paraboloïde touche le plan $z = 0$ quand $x^2 + y^2 = 4$, donc on ajoute le disque $S_2 : z = 0, x^2 + y^2 \leq 4$ (avec normale **vers le bas**, i.e. $\mathbf{n} = -\mathbf{k}$, pour que $S_1 \cup S_2$ forme une surface fermée orientée vers l'extérieur).

Étape 3 : Gauss sur le volume fermé V . Le volume est $V = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq z \leq 4 - x^2 - y^2\}$.

$$\Phi_{S_1} + \Phi_{S_2} = \iiint_V (2 + 2z) \, dV$$

Passons en cylindriques : $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta, z = z, dV = r \, dr \, d\theta \, dz$.

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_0^{4-r^2} (2 + 2z) r \, dz \, dr \, d\theta$$

Intégrons d'abord en z :

$$\begin{aligned} \int_0^{4-r^2} (2 + 2z) \, dz &= [2z + z^2]_0^{4-r^2} = 2(4 - r^2) + (4 - r^2)^2 = (4 - r^2)(6 - r^2) \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 (4 - r^2)(6 - r^2) r \, dr = 2\pi \int_0^2 (24r - 10r^3 + r^5) \, dr \\ &= 2\pi \left[12r^2 - \frac{10r^4}{4} + \frac{r^6}{6} \right]_0^2 = 2\pi \left(48 - 40 + \frac{64}{6} \right) = 2\pi \left(8 + \frac{32}{3} \right) = 2\pi \cdot \frac{56}{3} = \frac{112\pi}{3} \end{aligned}$$

Étape 4 : Flux à travers le couvercle S_2 . Sur $S_2 : z = 0, \mathbf{n} = -\mathbf{k} = (0, 0, -1), \mathbf{F}|_{z=0} = (x, y, 0)$.

$$\Phi_{S_2} = \iint_{S_2} \mathbf{F} \cdot (-\mathbf{k}) \, dA = \iint_{S_2} (-0) \, dA = 0$$

Conclusion : $\Phi_{S_1} = \frac{112\pi}{3} - 0 = \frac{112\pi}{3}$

Réflexe d'examen : Calculez **toujours** la divergence avant de vous lancer dans un calcul direct de flux. Ici, la fermeture avec un couvercle trivial ($z = 0$ donne $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = 0$) élimine un des deux morceaux, ce qui simplifie énormément.

Théorème – Théorème de Stokes (Circulation 3D vers Flux)

Formule : Relie une intégrale de surface **ouverte** S à la circulation le long de sa courbe frontière ∂S .

$$\oint_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\operatorname{curl} \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} \, d\sigma$$

Conditions d'application :

- La surface $S \subset \mathbb{R}^3$ doit être orientée et régulière par morceaux.
- Le bord ∂S doit être une courbe **fermée**.
- L'orientation de la courbe ∂S (vecteur tangent $\mathbf{T}$) et le vecteur normal $\mathbf{n}$ de S doivent être **compatibles** (Règle de la main droite : si je marche sur le bord dans le sens de la circulation avec la tête pointant vers $\mathbf{n}$, la surface S doit être à ma gauche).
- Le champ $\mathbf{F}$ doit être de classe C^1 sur un domaine ouvert contenant S .

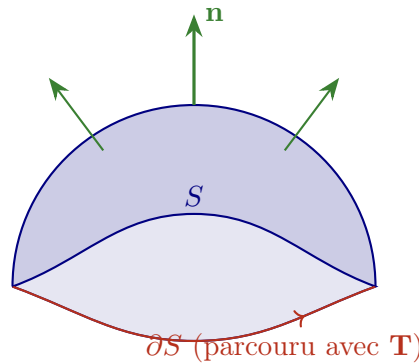
Quand l'utiliser ?

- **Dans le sens curviligne $\rightarrow$ surface :** Calculer la circulation 3D sur un **bord complexe**

(ex : ellipse formée par l'intersection d'un cylindre et d'un plan incliné) en la transformant en flux du rotationnel sur le disque intérieur du plan. C'est l'usage n°1 en examen !

- **Dans le sens surface → curviligne** : Calculer le flux d'un rotationnel compliqué sur une surface en "cloche" (ex : parabolôïde) en le ramenant à une surface **plate** (le disque de base) ayant le même bord.

Conséquence majeure : L'intégrale de surface du rotationnel de $\mathbf{F}$ est la **même** pour **toutes** les surfaces s'appuyant sur le contour ∂S !



Règle de la main droite : si le pouce indique $\mathbf{n}$, les doigts donnent le sens de ∂S .

Exemple – Stokes : circulation sur l'intersection cylindre / plan

Problème. Calculer $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ où $\mathbf{F} = (y, z, x)$ et C est l'intersection du cylindre $x^2 + y^2 = 1$ avec le plan $z = y$, orientée dans le sens anti-horaire vue du dessus.

Raisonnement. C est une courbe **fermée dans** $\mathbb{R}^3$ (ellipse spatiale). La paramétrer directement est faisable mais pénible. On utilise **Stokes** pour remplacer la circulation par un flux du rotationnel.

Étape 1 : Calculer $\text{curl } \mathbf{F}$.

$$\text{curl } \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ y & z & x \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial x}{\partial y} - \frac{\partial z}{\partial z}, \frac{\partial y}{\partial z} - \frac{\partial x}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial y}{\partial y} \right) = (0 - 1, 0 - 1, 0 - 1) = (-1, -1, -1)$$

Étape 2 : Choisir la surface S . On choisit la surface **la plus simple** s'appuyant sur C : la portion du plan $z = y$ à l'intérieur du cylindre. Sa projection sur le plan xy est le disque $D : x^2 + y^2 \leq 1$.

Étape 3 : Calculer la normale au plan. Le plan $z = y$ peut s'écrire $g(x, y, z) = z - y = 0$. Donc $\nabla g = (0, -1, 1)$. La normale unitaire (vers le haut, compatible avec l'orientation anti-horaire de C) est :

$$\mathbf{n} = \frac{(0, -1, 1)}{\|(0, -1, 1)\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, -1, 1)$$

Étape 4 : Appliquer Stokes.

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\text{curl } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} d\sigma$$

Sur un plan, $d\sigma = \frac{1}{|\mathbf{n} \cdot \mathbf{k}|} dA = \frac{1}{1/\sqrt{2}} dA = \sqrt{2} dA$.

Donc :

$$\begin{aligned} &= \iint_D (-1, -1, -1) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(0, -1, 1) \cdot \sqrt{2} dA = \iint_D (-1, -1, -1) \cdot (0, -1, 1) dA \\ &= \iint_D (0 + 1 - 1) dA = \iint_D 0 dA = \boxed{0} \end{aligned}$$

Observation : Le résultat est 0 car le rotationnel constant $(-1, -1, -1)$ est **parallèle** au plan $z = y$ (son produit scalaire avec la vraie normale du plan est nul). Géométriquement, le "tourbillon" du champ tourne dans une direction qui ne traverse pas la surface.

Exemple – Stokes : changement de surface (flux d'un rotationnel)

Problème. Calculer $\iint_S (\text{curl } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} \, d\sigma$ où $\mathbf{F} = (xz, -y, x^2y)$ et S est la demi-sphère supérieure $x^2 + y^2 + z^2 = 9, z \geq 0$, avec la normale orientée vers le haut.

Raisonnement. Le calcul direct sur la demi-sphère est très lourd (paramétrer en sphériques, calculer $\text{curl } \mathbf{F}$ en tout point, puis intégrer). Par Stokes, on peut **changer de surface** !

Étape 1 : Identifier le bord. Le bord de la demi-sphère est le cercle $C : x^2 + y^2 = 9, z = 0$, parcouru dans le sens anti-horaire (vu du dessus, compatible avec $\mathbf{n}$ vers le haut).

Étape 2 : Changer de surface. Par Stokes, $\iint_S (\text{curl } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$.

Mais on peut aussi prendre le **disque plat** $S' : x^2 + y^2 \leq 9, z = 0, \mathbf{n} = \mathbf{k}$, qui a le même bord C . En fait, ici calculons directement la circulation sur C .

Étape 3 : Paramétrer C .

$$x = 3 \cos t, \quad y = 3 \sin t, \quad z = 0, \quad t \in [0, 2\pi]$$

$$d\mathbf{r} = (-3 \sin t, 3 \cos t, 0) \, dt$$

Sur C (où $z = 0$) : $\mathbf{F} = (xz, -y, x^2y) = (0, -3 \sin t, 9 \cos^2 t \cdot 3 \sin t)$.

Étape 4 : Calculer le produit scalaire.

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = (0 \cdot (-3 \sin t) + (-3 \sin t)(3 \cos t) + 27 \cos^2 t \sin t \cdot 0) \, dt = -9 \sin t \cos t \, dt$$

Étape 5 : Intégrer.

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} -9 \sin t \cos t \, dt = -\frac{9}{2} \int_0^{2\pi} \sin(2t) \, dt = -\frac{9}{2} \cdot 0 = \boxed{0}$$

Leçon clé : Quand on vous demande le flux d'un rotationnel sur une surface compliquée, pensez **immédiatement** à Stokes. Souvent, la circulation sur le bord (qui peut être dans un plan $z = \text{cte}$) est bien plus simple. Ici, $z = 0$ annule la composante xz de $\mathbf{F}$, ce qui simplifie tout.

Exemple – Stokes appliqué deux fois (Indépendance de la surface)

Problème. Calculez le flux du rotationnel de $\mathbf{F}(x, y, z) = (4y, x \sin z, e^{x^2-y^2})$ sortant de l'hémisphère $S = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1, z > 0\}$.

Raisonnement. On demande de calculer le flux d'un rotationnel : $\iint_S (\text{curl } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} \, d\sigma$. L'hémisphère est une surface ouverte dont le bord C est le cercle unité dans le plan $z = 0$. Calculer ce flux directement sur l'hémisphère serait affreux. On va utiliser le Théorème de Stokes **deux fois** (ou "principe d'indépendance de la surface").

Étape 1 : Le double Stokes.

Par le théorème de Stokes (de la surface vers le bord) :

$$\iint_S (\text{curl } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

Mais plutôt que de calculer cette circulation (qui reste pénible avec des termes comme $e^{x^2-y^2}$), on réapplique Stokes (du bord vers une **nouvelle** surface) ! On choisit la surface la plus simple

s'appuyant sur C : le **disque plat** $D = \{(x, y, 0) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$.

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_D (\text{curl } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k} dA$$

Conclusion : Le flux du rotationnel sur l'hémisphère S est exactement égal au flux du rotationnel sur le disque plat D .

Étape 2 : Calculer la composante utile du rotationnel.

Sur le disque D , la normale est simplement $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$. On n'a donc besoin que de la **composante z** de $\text{curl } \mathbf{F}$:

$$(\text{curl } \mathbf{F})_z = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(x \sin z) - \frac{\partial}{\partial y}(4y) = \sin z - 4$$

Étape 3 : Évaluer sur le disque D .

Sur le disque D , on est dans le plan $z = 0$. Donc $\sin(z) = \sin(0) = 0$. La composante z du rotationnel se simplifie magnifiquement :

$$(\text{curl } \mathbf{F})_z \Big|_{z=0} = -4$$

Étape 4 : Intégration finale.

Le flux cherché devient :

$$\iint_D (\text{curl } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k} dA = \iint_D (-4) dA = -4 \iint_D 1 dA = -4 \times \text{Aire}(D)$$

Puisque D est un disque de rayon 1, son aire est $\pi(1)^2 = \pi$.

$$\text{Flux} = \boxed{-4\pi}$$

Leçon d'examen : C'est la quintessence de la puissance de Stokes. Si l'énoncé demande de calculer un flux du type $\iint (\text{curl } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}$ sur un "parachute" (surface 3D), changez immédiatement la surface pour le "filet plat" (disque 2D) tendu sur le même bord. Remplacer z par 0 tuera souvent les termes affreux.

Exemple – Examen type (Flux du rotationnel sur un hémisphère, fermeture par $\text{div}(\text{curl } \mathbf{F}) = 0$)

Problème. Calculez le flux I du rotationnel de

$$\mathbf{f}(x, y, z) = -y \mathbf{i} + 2x \sin z \mathbf{j} + \cos(x^2 - y^2) \mathbf{k}$$

sortant de l'hémisphère $S = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0\}$.

Raisonnement. On veut $I = \iint_S (\text{curl } \mathbf{f}) \cdot \mathbf{n}_S d\sigma$. Calculer le rotationnel complet puis l'intégrer sur l'hémisphère serait un cauchemar (termes en $\sin(x^2 - y^2)$, $\cos z$, etc.). On utilise le théorème de Stokes appliqué **deux fois** (indépendance de la surface) pour remplacer l'hémisphère par le disque plat D de même bord.

Étape 1 : Identifier le bord et fermer la surface.

L'hémisphère S et le disque $D = \{(x, y, 0) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ partagent le **même bord** : le cercle unité C dans le plan $z = 0$. Par le théorème de Stokes :

$$\iint_S (\text{curl } \mathbf{f}) \cdot \mathbf{n}_S d\sigma = \oint_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = \iint_D (\text{curl } \mathbf{f}) \cdot \mathbf{k} dA$$

On peut aussi voir cela via l'identité $\text{div}(\text{curl } \mathbf{f}) = 0$: l'hémisphère S et le disque D forment ensemble une surface fermée. Puisque le flux de $\text{curl } \mathbf{f}$ à travers toute surface fermée est nul :

$$\iint_S (\text{curl } \mathbf{f}) \cdot \mathbf{n}_S d\sigma + \iint_D (\text{curl } \mathbf{f}) \cdot (-\mathbf{k}) dA = 0$$

(le $-\mathbf{k}$ vient du fait que la normale **sortante** du disque pointe vers le bas pour fermer le volume).
Donc :

$$I = \iint_D (\text{curl } \mathbf{f}) \cdot \mathbf{k} \, dA$$

Étape 2 : Calculer le rotationnel de $\mathbf{f}$.

Avec $P = -y$, $Q = 2x \sin z$, $R = \cos(x^2 - y^2)$:

$$\text{curl } \mathbf{f} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ -y & 2x \sin z & \cos(x^2 - y^2) \end{vmatrix}$$

$$(\text{curl } \mathbf{f})_x = \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = -\sin(x^2 - y^2) \cdot (-2y) - 2x \cos z = 2y \sin(x^2 - y^2) - 2x \cos z$$

$$(\text{curl } \mathbf{f})_y = \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = 0 - (-\sin(x^2 - y^2) \cdot 2x) = 2x \sin(x^2 - y^2)$$

$$(\text{curl } \mathbf{f})_z = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 2 \sin z - (-1) = 2 \sin z + 1$$

Étape 3 : Évaluer sur le disque D ($z = 0$).

Sur D , seule la composante z du rotationnel intervient (car $\mathbf{n} = \mathbf{k}$). En posant $z = 0$:

$$(\text{curl } \mathbf{f})_z \Big|_{z=0} = 2 \sin(0) + 1 = 0 + 1 = 1$$

Les composantes x et y (qui contiennent les termes $\sin(x^2 - y^2)$ et $\cos z$ affreux) ne contribuent pas au produit scalaire avec $\mathbf{k}$.

Étape 4 : Intégration finale.

$$I = \iint_D 1 \, dA = \text{Aire}(D) = \pi \cdot 1^2 = \boxed{\pi \approx 3,14}$$

Leçon d'examen : Quand le champ $\mathbf{f}$ contient des termes affreux ($\cos(x^2 - y^2)$, $\sin z$, $e^{x^2} \dots$), l'astuce est de remplacer la surface 3D par le disque plat dans $z = 0$. Le passage à $z = 0$ tue souvent ces termes, et seule la composante z du rotationnel survit. C'est un cas **très fréquent** aux examens.

6.4 Procédures de résolution : Quel théorème choisir ?

Procédure : Calculer un flux de $\mathbf{F}$ (Ex : $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma$)

Étape 1 La surface S est-elle fermée ? (ex : sphère complète, surface délimitant un volume D).

- **OUI** $\Rightarrow$ Théorème de **Gauss**. Calculez $\text{div } \mathbf{F}$ et intégrez sur le volume V . (Si l'énoncé dit "normale entrante", n'oubliez pas un signe -).
- **NON** $\Rightarrow$ Allez à l'étape 2.

Étape 2 La surface S n'est pas fermée. Calculez $\text{div } \mathbf{F}$.

- Si $\text{div } \mathbf{F}$ est très simple (ou nul), il est souvent malin de **fermer artificiellement** S avec une surface facile $S_{\text{couvercle}}$ (ex : un disque dans un plan de coordonnée). On applique Gauss sur $V = S \cup S_{\text{couvercle}}$, puis $\Phi_S = \Phi_V - \Phi_{\text{couvercle}}$.
- Sinon, si $\mathbf{F}$ est de la forme $\mathbf{F} = \text{curl } \mathbf{A}$, on peut utiliser **Stokes** pour calculer le flux en calculant la circulation de $\mathbf{A}$ sur le bord. C'est rare mais élégant.

— Sinon, faire un calcul **direct** (Chapitre 5).

Procédure : Calculer une circulation/travail de $\mathbf{F}$ (Ex : $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$)

Étape 1 La courbe C est-elle fermée ? (boucle).

- **NON** $\Rightarrow$ Vérifier si le champ est conservatif (Chapitre 4). Si oui, potentiel aux bornes. Sinon, calcul direct (Chapitre 4) ou ajout d'un chemin trivial pour fermer C .
- **OUI** $\Rightarrow$ Allez à l'étape 2.

Étape 2 La courbe C est fermée. Où vit-elle ?

- **Dans le plan $\mathbb{R}^2$** $\Rightarrow$ Théorème de **Green**. Calculez $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$ et intégrez sur la surface délimitée D . Vérifier l'orientation de C (anti-horaire = +, horaire = -).
- **Dans l'espace $\mathbb{R}^3$** $\Rightarrow$ Théorème de **Stokes**. Calculez $\text{curl } \mathbf{F}$. Choisissez une surface S simple qui s'appuie sur C (ex : un disque plat incliné). Orientez la normale $\mathbf{n}$ de manière compatible avec C , et calculez le flux du rotationnel à travers S .

6.5 Patterns récurrents d'examen (2013–2025)

Statistiques des questions "Théorèmes Intégraux"

- T1 Stokes sur l'intersection d'un cylindre et d'un plan :** L'un des exercices les plus courants de l'examen (présent en 2017, 2018, 2021). On demande la circulation sur l'intersection $S_1 \cap S_2$. La méthode canonique est d'utiliser Stokes sur la surface plane bordée par cette intersection (qui est une ellipse), ce qui réduit le flux 3D en une simple intégrale double de polynôme sur le disque d'ombre dans le plan xy .
- T2 Gauss avec singularité :** Si le champ a une singularité (comme le champ électrique point-source à l'origine $\mathbf{F} = \mathbf{r}/r^3$), on ne peut pas utiliser Gauss si la singularité est à l'intérieur du volume. L'astuce est d'isoler l'origine avec une petite sphère S_ϵ .
- T3 Divergence simple mais flux dur :** Examen 2023 / 2025. On donne un flux sortant hyper complexe. Mais $\text{div } \mathbf{F}$ se simplifie miraculeusement en une constante (ex : $\text{div } \mathbf{F} = 3$). Le flux devient alors trivialement $3 \times \text{Volume}(V)$. Ne vous précipitez **jamais** sur le calcul direct d'un flux d'examen sans calculer d'abord la divergence !
- T4 Changement de surface par Stokes :** Si on demande d'évaluer $\iint_S (\text{curl } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} d\sigma$ sur une "cloche" dégueulasse, on peut (par Stokes) changer S par n'importe quelle surface s'appuyant sur le même bord (par exemple le disque de base à plat $z = 0$).

6.6 Tableau récapitulatif des théorèmes

Théorème	Espace	Géométrie (Bord $\longleftrightarrow$ Intérieur)	Formule vectorielle
Green	$\mathbb{R}^2$	Courbe fermée $\partial D \longleftrightarrow$ Domaine plan D	$\oint_{\partial D} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA$
Divergence 2D	$\mathbb{R}^2$	Courbe fermée $\partial D \longleftrightarrow$ Domaine plan D	$\oint_{\partial D} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds = \iint_D (\text{div } \mathbf{F}) dA$
Stokes	$\mathbb{R}^3$	Courbe fermée $\partial S \longleftrightarrow$ Surface ouverte S	$\oint_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\text{curl } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} d\sigma$
Gauss	$\mathbb{R}^3$	Surface fermée $\partial V \longleftrightarrow$ Volume solide V	$\oiint_{\partial V} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma = \iiint_V (\text{div } \mathbf{F}) dV$

Exemple – Examen Juin 2023, Q5 (Flux en carré inverse, sources et puits)

Problème. Soit le champ vectoriel

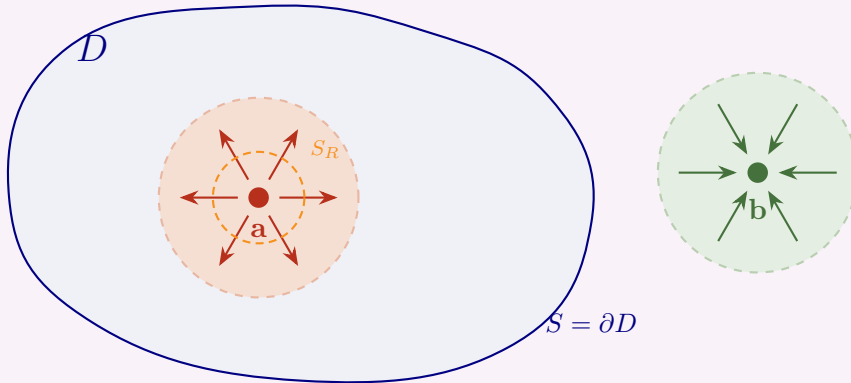
$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \underbrace{2I(\mathbf{x} - \mathbf{a})}_{\mathbf{G}(\mathbf{x})} + \underbrace{(-1)I(\mathbf{x} - \mathbf{b})}_{\mathbf{H}(\mathbf{x})} \quad \text{avec} \quad I(\mathbf{x}) := \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|^3} = \frac{(x, y, z)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

où $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ sont deux points distincts de $\mathbb{R}^3$.

- (a) Calculer $\operatorname{div} I$ et $\operatorname{div} \mathbf{F}$ en tout point $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}, \mathbf{a}, \mathbf{b}$.
- (b) Calculer le flux sortant φ de $\mathbf{F}$ à travers $S = \partial D$ si $\mathbf{a}, \mathbf{b} \notin D$.
- (c) Calculer φ si $\mathbf{a} \in \operatorname{int} D$ mais $\mathbf{b} \notin D$.

Intuition physique : sources et puits.

Le champ $I(\mathbf{x})$ est le **champ électrique d'une charge ponctuelle** (ou le champ gravitationnel d'une masse ponctuelle). Sa divergence est nulle partout **sauf** au point singulier, où elle est infinie (distribution de Dirac). Physiquement :



↔ **Source** (coeff. +2) : génère du flux $\rightarrow \varphi = +2 \times 4\pi$

↔ **Puits** (coeff. -1) : absorbe du flux $\rightarrow \varphi = -1 \times 4\pi$

Seules les singularités à l'intérieur de D contribuent au flux sortant.

Règle fondamentale : Le flux sortant à travers S ne dépend que des singularités **à l'intérieur** de D . Les singularités à l'extérieur ne contribuent pas (car $\operatorname{div} \mathbf{F} = 0$ loin des singularités et Gauss s'applique). Chaque singularité "source" de coefficient α à l'intérieur contribue $\alpha \cdot 4\pi$ au flux sortant.

(a) **Calcul de $\operatorname{div} I$.**

On calcule composante par composante. Pour la première composante $I_1 = \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$, en posant $r = \|\mathbf{x}\|$:

$$\frac{\partial I_1}{\partial x} = \frac{r^3 - x \cdot 3r^2 \cdot \frac{x}{r}}{r^6} = \frac{r^3 - 3x^2 r}{r^6} = \frac{1}{r^3} - \frac{3x^2}{r^5}$$

Par symétrie, $\frac{\partial I_2}{\partial y} = \frac{1}{r^3} - \frac{3y^2}{r^5}$ et $\frac{\partial I_3}{\partial z} = \frac{1}{r^3} - \frac{3z^2}{r^5}$. En sommant :

$$\operatorname{div} I = \frac{3}{r^3} - \frac{3(x^2 + y^2 + z^2)}{r^5} = \frac{3}{r^3} - \frac{3r^2}{r^5} = \frac{3}{r^3} - \frac{3}{r^3} = \boxed{0}$$

Par la règle de la chaîne : $\operatorname{div} \mathbf{G}(\mathbf{x}) = 2 \operatorname{div} I(\mathbf{x} - \mathbf{a}) = 0$ et $\operatorname{div} \mathbf{H}(\mathbf{x}) = -\operatorname{div} I(\mathbf{x} - \mathbf{b}) = 0$.

Donc $\boxed{\operatorname{div} \mathbf{F} = 0}$ en tout point $\mathbf{x} \neq \mathbf{a}, \mathbf{b}$.

(b) **Flux si $\mathbf{a}, \mathbf{b} \notin D$.**

Si aucune singularité n'est à l'intérieur de D , alors $\mathbf{F}$ est de classe C^1 sur tout D . Le théorème de

Gauss s'applique directement :

$$\varphi = \oint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_{ext} d\sigma = \iiint_D \underbrace{(\operatorname{div} \mathbf{F})}_{=0} dV = \boxed{0}$$

Interprétation : Pas de source ni de puits à l'intérieur $\Rightarrow$ tout ce qui entre ressort, le flux net est nul.

(c) Flux si $\mathbf{a} \in \operatorname{int} D$ et $\mathbf{b} \notin D$.

Problème : $\mathbf{G}$ n'est pas C^1 en $\mathbf{a}$! On ne peut pas appliquer Gauss directement sur D .

Astuce de la petite sphère : On isole la singularité $\mathbf{a}$ dans une petite sphère S_R de rayon R centrée sur $\mathbf{a}$, incluse dans D . On considère le volume $E = D \setminus D_R$ (le domaine D privé de la boule D_R). Sur E , $\mathbf{F}$ est C^1 (les deux singularités sont **en dehors** de E). On peut appliquer Gauss sur E dont le bord est $\partial E = S \cup S_R$:

$$0 = \iiint_E (\operatorname{div} \mathbf{F}) dV = \oint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_{ext} d\sigma + \oint_{S_R} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}^- d\sigma$$

où $\mathbf{n}^-$ est la normale **entrante** sur S_R (qui est la normale sortante pour le volume E). Donc :

$$\varphi = \oint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_{ext} d\sigma = \oint_{S_R} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}^+ d\sigma$$

(où $\mathbf{n}^+$ est la normale sortante de S_R , car $\mathbf{n}^- = -\mathbf{n}^+$).

Contribution de $\mathbf{H}$: Comme $\mathbf{b} \notin D$, on a $\operatorname{div} \mathbf{H} = 0$ sur tout D , donc par Gauss appliqué directement à $\mathbf{H}$ sur D : $\oint_S \mathbf{H} \cdot \mathbf{n}_{ext} d\sigma = 0$. Donc seul $\mathbf{G}$ contribue au flux.

Calcul sur S_R : Sur la sphère S_R centrée en $\mathbf{a}$, on a $\mathbf{x} - \mathbf{a} = R \hat{\mathbf{n}}$ (où $\hat{\mathbf{n}}$ est le vecteur radial unitaire), donc :

$$I(\mathbf{x} - \mathbf{a}) = \frac{\mathbf{x} - \mathbf{a}}{\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|^3} = \frac{R \hat{\mathbf{n}}}{R^3} = \frac{\hat{\mathbf{n}}}{R^2}$$

Ainsi $\mathbf{G} \cdot \mathbf{n}^+ = 2 I(\mathbf{x} - \mathbf{a}) \cdot \hat{\mathbf{n}} = \frac{2}{R^2}$ (constante sur S_R !).

$$\varphi = \oint_{S_R} \frac{2}{R^2} d\sigma = \frac{2}{R^2} \cdot \underbrace{\operatorname{Aire}(S_R)}_{=4\pi R^2} = \frac{2}{R^2} \cdot 4\pi R^2 = \boxed{8\pi \approx 25,13}$$

Résumé (formule flash) : Pour un champ $\mathbf{F} = \sum_k \alpha_k I(\mathbf{x} - \mathbf{p}_k)$, le flux sortant à travers S est :

$$\varphi = \sum_{\mathbf{p}_k \in \operatorname{int} D} \alpha_k \cdot 4\pi$$

Ici, seul $\mathbf{a}$ est à l'intérieur avec coefficient $\alpha = 2$: $\varphi = 2 \times 4\pi = 8\pi$.

Leçon d'examen : Cet exercice teste trois réflexes cruciaux : (1) calculer la divergence du champ en carré inverse (qui vaut zéro), (2) savoir que Gauss ne s'applique que si $\mathbf{F}$ est C^1 sur **tout** le volume (pas de singularité à l'intérieur !), (3) isoler une singularité avec une petite sphère pour ramener le flux à un calcul trivial. Le flux final ne dépend **ni du rayon R** de la petite sphère, **ni de la forme de D** : c'est une propriété topologique profonde.

7 Méthodes transversales & Réflexes d'examen

Ce dernier chapitre ne contient pas de nouvelle théorie, mais compile les **réflexes de survie** et les stratégies transversales qui feront la différence entre un 10/20 et un 18/20 le jour de l'examen.

7.1 Les Red Flags : signes que vous êtes sur la mauvaise piste

Si vous vous retrouvez dans l'une des situations suivantes, **arrêtez-vous** et cherchez une autre méthode !

Attention – Red Flag 1 : Une intégrale impossible à calculer

Vous devez calculer une intégrale (simple, double ou triple) et vous tombez sur une primitive impossible comme $\int e^{-x^2} dx$, $\int \sin(x^2) dx$ ou un polynôme de degré 12. **Que faire ?**

- **Symétrie** : Le domaine est-il symétrique et la fonction impaire ? (Le résultat est 0).
- **Changement d'ordre** : Dans une intégrale multiple, inversez l'ordre d'intégration (Fubini).
- **Théorème intégral** : S'il s'agit d'une circulation ou d'un flux, vous deviez probablement utiliser Gauss, Stokes ou un potentiel.

Attention – Red Flag 2 : Un flux sur une surface fermée calculé "à la main"

Si l'énoncé parle d'un volume délimité par une sphère, un cône et un plan, et demande le flux "sortant". **Que faire ?**

- N'essayez **jamais** de paramétrer les 3 morceaux de la surface pour faire 3 calculs de flux !
- Utilisez **immédiatement** le Théorème de la Divergence (Gauss). L'intégrale triple sera beaucoup plus simple.

Attention – Red Flag 3 : Une matrice Hessienne impossible à évaluer

Vous cherchez les extrema et le déterminant de la Hessienne donne une expression illisible de 3 lignes. **Que faire ?**

- Vérifiez que vous avez bien remplacé (x, y) par les coordonnées du point critique **avant** d'essayer de simplifier !
- Avez-vous simplifié la fonction avant de dériver ? (Par exemple, minimiser $f(x, y)$ revient à minimiser $\ln(f(x, y))$ si $f > 0$, ce qui casse les produits/quotients atroces).

7.2 L'arbre de décision ultime pour les intégrales de champs vectoriels

Face à la question "Calculez l'intégrale du champ $\mathbf{F}$ sur X " :

Que dois-je calculer ?

1. Est-ce un TRAVAIL / CIRCULATION ? ($\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$)

- Le contour C est-il **fermé** ?
 - **OUI** : En 2D $\rightarrow$ Green. En 3D $\rightarrow$ Stokes.
 - **NON** : Calculer $\text{curl } \mathbf{F}$.
 - Si $\text{curl } \mathbf{F} = \mathbf{0} \rightarrow$ Champ conservatif. Trouver le potentiel g et faire $g(B) - g(A)$.
 - Si $\text{curl } \mathbf{F} \neq \mathbf{0} \rightarrow$ Paramétrisation directe (Chapitre 4).

2. Est-ce un FLUX ? ($\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma$)

- La surface S est-elle **fermée** ? (Définit-elle un volume V ?)
 - **OUI** : Théorème de la Divergence (Gauss) sur le volume V .

- **NON** : Calculer $\operatorname{div} \mathbf{F}$.
 - Si $\operatorname{div} \mathbf{F} = 0$ (ou constant/simple) $\rightarrow$ Fermer la surface avec un couvercle facile, appliquer Gauss, puis soustraire le flux du couvercle.
 - Sinon $\rightarrow$ Paramétrisation directe (Chapitre 5).

7.3 Vérifications de bon sens (Sanity Checks)

Prenez 10 secondes à la fin d'un exercice pour vérifier ceci :

1. **Signe d'une aire ou d'un volume** : Avez-vous trouvé une aire ou un volume négatif? Si oui, vous avez inversé des bornes d'intégration ou oublié une valeur absolue sur le Jacobien.
2. **Dimensions** : Si vous intégrez $(x^2 + y)$ en 2D sur un domaine de taille R , le résultat doit grossièrement avoir une composante en R^4 (pour $x^2 dx dy$) et une en R^3 (pour $y dx dy$).
3. **Unité de la divergence** : Le calcul $\iiint \operatorname{div} \mathbf{F} dV$ revient à intégrer une "dérivée de $\mathbf{F}$ " trois fois, ce qui donne $F \times \text{Surface}$. C'est cohérent avec le flux $\iint \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma$.