

Synthèse complète

LEPL1101 — Algèbre Linéaire

Théorie, formules, procédures et exemples résolus

Basée sur les compilations QCM et Questions Ouvertes (Janvier 2019 – Juin 2025)

26 août 2026

Table des matières

1	Calcul matriciel	4
1.1	Matrices et vecteurs	4
1.2	Opérations sur les matrices	4
1.3	Inversion et Déterminant	5
1.4	La transposée	6
2	Systèmes d'équations linéaires	7
2.1	Forme matricielle	7
2.2	Méthode d'échelonnement (Gauss)	7
2.3	Discussion des solutions	7
2.4	Matrices élémentaires et factorisation LU	8
3	Espaces vectoriels, sous-espaces, bases et dimensions	9
3.1	Définitions fondamentales	9
3.2	Sous-espaces de polynômes $\mathbb{R}_n[x]$	9
3.3	Somme et somme directe	9
3.4	Démontrer qu'un ensemble est un sev	10
3.5	Les quatre sous-espaces fondamentaux	11
3.6	Solution complète d'un système linéaire	11
3.7	Stabilisation d'un sous-espace	11
4	Applications linéaires	12
4.1	Définition et vérification	12
4.2	Noyau, Image, Injectivité, Surjectivité	12
4.3	Unicité d'une application linéaire	13
4.4	Inverse d'une application linéaire bijective	14
4.5	Matrices idempotentes ($A^2 = A$)	14
4.6	Applications commutantes	14
4.7	Lien entre $\text{Ker}(A)$, $\text{Im}(A)$ et $\text{Ker}(A^2)$	14
5	Matrice associée à une application linéaire	15
5.1	Construction de la matrice ${}_f(L)_e$	15
5.2	Changement de base	16

6	Déterminants	18
6.1	Propriétés fondamentales	18
7	Valeurs propres, vecteurs propres et diagonalisation	20
7.1	Définitions	20
7.2	Calcul des vecteurs propres	21
7.3	Multiplicités	22
7.4	Diagonalisation	22
7.5	Forme de Jordan	23
7.6	Théorème de Cayley-Hamilton	23
7.7	Matrices de rang 1	24
7.8	Vecteurs propres de matrices symétriques	24
7.9	Comportement asymptotique de A^k	24
7.10	Chaînes de Markov et Matrices stochastiques	25
8	Trace et propriétés des matrices	26
9	Formes quadratiques	28
9.1	Matrice associée	28
9.2	Méthodes de diagonalisation	28
9.3	Classification	30
9.4	Discussion de l'inertie en fonction d'un paramètre	30
9.5	Quadriques	30
9.6	Forme $x^\top Mx$ comme produit scalaire	31
9.7	Formes bilinéaires et Matrice de Gram	31
10	Produit scalaire, Gram-Schmidt et projections	31
10.1	Produit scalaire	31
10.2	Gram-Schmidt	33
10.3	Projections orthogonales	34
10.4	Matrices orthogonales, Isométries et Réflexions	36
10.5	Produits scalaires non standard	36
10.6	Projection et optimisation	39
11	Moindres carrés (régression linéaire)	40
11.1	Principe	40
11.2	Régression quadratique	41
12	Équations différentielles, systèmes et récurrences	42
12.1	EDO linéaires à coefficients constants	42
12.2	Systèmes d'EDO linéaires	43
12.3	Équations de récurrence linéaires	43
12.4	Récurrences d'ordre supérieur	45
12.5	EDO avec racines complexes	46
12.6	Systèmes non diagonalisables — triangularisation	46
12.7	EDO à coefficients non constants via opérateurs	47
12.8	Exponentielle matricielle	47
12.9	Gradient et systèmes dynamiques	47
13	Changement de base et rotations	48
13.1	Matrice de changement de base	48
13.2	Matrices de rotation	49

Astuces pour gagner du temps à l'examen	50
Récapitulatif des formules essentielles	51

1 Calcul matriciel

1.1 Matrices et vecteurs

Définition 1.1 (Matrice et notation). Une matrice est un tableau rectangulaire contenant des entrées (réels, complexes, etc.). On dénote une matrice A de m lignes et n colonnes par $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

- L'entrée située à la ligne i et colonne j se note A_{ij} .
- La ligne i entière se note A_{i*} .
- La colonne j entière se note A_{*j} .

Matrices carrées particulières

Une matrice carrée ($m = n$) possède une **diagonale principale** (du haut à gauche vers le bas à droite).

- **Triangulaire supérieure** (U) : tous les termes en dessous de la diagonale sont nuls.
- **Triangulaire inférieure** (L) : tous les termes au-dessus de la diagonale sont nuls.
- **Diagonale** (D) : tous les termes hors diagonale sont nuls.
- **Identité** (I) : matrice diagonale dont tous les termes sur la diagonale valent 1. C'est l'élément neutre de la multiplication matricielle.

Vecteurs : On considère généralement un vecteur comme une matrice d'une seule colonne ($n \times 1$), noté en minuscule (ex. $\mathbf{x}$, $\mathbf{b}$). Un vecteur ligne s'écrit comme sa transposée $\mathbf{x}^\top$ (ou $\mathbf{b}^\top$).

1.2 Opérations sur les matrices

Opérations élémentaires

Une opération élémentaire s'applique sur les lignes (ou colonnes) d'une matrice :

1. **Permutation** de deux lignes. (**Multiplie** le déterminant par -1).
2. **Multiplication** d'une ligne par un scalaire $\lambda \neq 0$. (**Multiplie** le déterminant par λ).
3. **Addition** à une ligne d'un multiple d'une autre ligne ($L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$). (**Aucun effet** sur le déterminant).

Opérations de base

Addition : $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$. $(A + B)_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$. (Les matrices doivent avoir la même taille).

Multiplication par un scalaire : $\alpha \in \mathbb{R}$. $(\alpha A)_{ij} = \alpha(A_{ij})$.

Multiplication matricielle

Pour multiplier $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ et $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$, le nombre de colonnes de A doit être égal au nombre de lignes de B . Le produit $AB \in \mathbb{R}^{m \times p}$. La loi fondamentale est l'associativité : $(AB)C = A(BC)$. Il existe **4 manières** d'interpréter AB :

1. **Produit scalaire (Dot product)** : Chaque entrée $(AB)_{ij}$ est le produit scalaire de la ligne i de A avec la colonne j de B .

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^n A_{ik} B_{kj}$$

2. **Combinaisons linéaires des colonnes** : Chaque colonne de AB est une combinaison linéaire des colonnes de A (avec les coefficients pris dans la colonne correspondante de B).

$$AB = A[\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_p] = [A\mathbf{b}_1, A\mathbf{b}_2, \dots, A\mathbf{b}_p]$$

3. **Combinaisons linéaires des lignes** : Chaque ligne de AB est une combinaison linéaire des lignes de B (coefficients pris dans la ligne de A).

$$(AB)_{i*} = A_{i*}B$$

4. **Somme de matrices engendrées** : Le produit est la somme des matrices de rang 1 obtenues en multipliant la colonne k de A par la ligne k de B .

$$AB = \sum_{k=1}^n A_{*k}B_{k*}$$

1.3 Inversion et Déterminant

L'inverse d'une matrice

Seules les matrices carrées peuvent avoir une inverse A^{-1} , définie par : $AA^{-1} = A^{-1}A = I$. Une matrice est inversible **si et seulement si son déterminant est non nul** ($\det(A) \neq 0$).

Calcul pratique : on place la matrice à côté de l'identité $[A \mid I]$, et on applique des opérations élémentaires sur les lignes pour obtenir l'identité à gauche, ce qui donne $[I \mid A^{-1}]$ à droite.

Propriété clé : L'inverse d'un produit inverse l'ordre des facteurs ("anti-produit") :

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

Inverse d'une 2×2 et matrice diagonale

Réversion 2×2 : Infaillible et rapide pour $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Matrice diagonale D : Il suffit d'inverser chaque élément non nul de la diagonale ($D_{ii}^{-1} = 1/D_{ii}$).

Le déterminant

Le déterminant résume une matrice carrée.

- **Méthode de Laplace (cofacteurs)** : On choisit une ligne ou une colonne (de préférence avec un maximum de zéros). On somme les éléments multipliés par leur signe alterné $(-1)^{i+j}$ et par le déterminant de la sous-matrice restante.
- **Matrice triangulaire / diagonale** : Le déterminant est simplement le **produit des éléments de sa diagonale**.
- **Déterminant de l'inverse** : $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$.

1.4 La transposée

Propriétés de la transposée

La transposée $A^\top$ s'obtient en inversant les lignes et les colonnes : $(A^\top)_{ij} = A_{ji}$. Si $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, alors $A^\top \in \mathbb{R}^{n \times m}$.

- $(A + B)^\top = A^\top + B^\top$
- $(AB)^\top = B^\top A^\top$ (Anti-produit, comme pour l'inverse)
- $(A^\top)^{-1} = (A^{-1})^\top$

2 Systèmes d'équations linéaires

2.1 Forme matricielle

Tout système linéaire de m équations à n inconnues peut s'écrire :

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m.$$

La **matrice complétée** (ou augmentée) est $(A \mid \mathbf{b})$.

2.2 Méthode d'échelonnement (Gauss)

Procédure d'échelonnement

1. Écrire la matrice complétée $(A \mid \mathbf{b})$.
2. Appliquer des opérations élémentaires sur les lignes :
 - $L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$ (ajouter un multiple d'une ligne à une autre)
 - $L_i \leftarrow \alpha L_i, \alpha \neq 0$ (multiplier une ligne par un scalaire non nul)
 - $L_i \leftrightarrow L_j$ (permuter deux lignes)
3. Obtenir une forme échelonnée (pivots en escalier).
4. Lire le rang et discuter l'existence de solutions.

Définition 2.1 (Matrice réduite R). La forme échelonnée réduite (souvent notée R ou *rref*) est une forme échelonnée U où :

- Tous les **pivots valent 1**.
- Tous les autres termes des **colonnes contenant un pivot sont nuls**.

Contrairement à la forme échelonnée U , la matrice réduite R d'une matrice A est **unique**. Le nombre de pivots de R est le **rang** de la matrice A (r). Les colonnes de R sans pivot correspondent aux **variables libres**.

2.3 Discussion des solutions

Théorème de Rouché-Capelli et lien avec le rang

Soit un système $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ de m équations à n inconnues, et soit r le rang de A .

- **Existence de solution** : Il y a au moins une solution $\iff \text{rang}(A) = \text{rang}(A \mid \mathbf{b})$. (Aucune ligne du type $0 = c \neq 0$).
- **Variables libres** : S'il y a des solutions, leur nombre dépend de r :
 - $r = n$: Aucune variable libre $\Rightarrow$ **solution unique**.
 - $r < n$: Il y a $n - r$ variables libres $\Rightarrow$ **infinité de solutions**.

Analyse selon la forme de la matrice :

1. $m = r = n$: A est carrée et **invertible**. $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ possède une **solution unique**.
2. $m = r < n$: A est **rectangulaire couchée** (pleine ligne). Il y a une **infinité de solutions** (car $r < n$).
3. $m > r = n$: A est **rectangulaire debout** (pleine colonne). Il y a **soit 1 solution, soit aucune** (selon que $\mathbf{b}$ soit compatible ou non).
4. $m > r$ et $r < n$: A n'est **pas de plein rang**. Il y a **soit une infinité de solutions, soit aucune**.

Propriétés utiles

- Un système de m équations à n inconnues avec $n > m$ **ne peut pas** avoir de solution unique (au moins $n - m$ variables libres).
- Un système homogène ($\mathbf{b} = \mathbf{0}$) a **toujours** au moins la solution triviale $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
- Le rang d'une matrice est $\leq \min(m, n)$.

2.4 Matrices élémentaires et factorisation LU

Définition 2.2 (Matrices élémentaires E). Une matrice élémentaire E est obtenue en appliquant **une seule opération élémentaire** sur la matrice identité I .

- Multiplier une matrice A à gauche par E (EA) revient à appliquer cette même opération élémentaire sur les lignes de A .
- L'inversion d'une matrice E correspond à l'opération inverse (ex : si E ajoute $3L_1$ à L_2 , E^{-1} soustrait $3L_1$ à L_2).

La factorisation $A = LU$

Si une matrice A peut être réduite à une forme échelonnée U (triangulaire supérieure) **uniquement par des additions de lignes** (sans permutations), on peut l'écrire sous la forme :

$$A = LU$$

où L est la matrice **anti-élémentaire** (triangulaire inférieure).

- U contient les pivots sur sa diagonale.
- L contient des 1 sur sa diagonale, et les **multiplicateurs** (changés de signe par rapport aux opérations d'élimination $L_i \leftarrow L_i - \alpha L_j$) dans la partie strictement inférieure.
- Cette factorisation est très utile en calcul numérique pour résoudre rapidement plusieurs systèmes $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ sans recalculer l'échelonnement.

Exemple résolu — Janvier 2019

Soit le système :

$$\begin{cases} 2x + 5y - 3z = a \\ 4x - y + 2z = b \\ -2x - 16y + 11z = c \end{cases}$$

Échelonnement de $(A \mid \mathbf{b})$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & -3 & a \\ 4 & -1 & 2 & b \\ -2 & -16 & 11 & c \end{array} \right) \xrightarrow{L_2 - 2L_1, L_3 + L_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & -3 & a \\ 0 & -11 & 8 & b - 2a \\ 0 & 0 & 0 & c + 3a - b \end{array} \right)$$

Conclusion : le système a des solutions $\iff c + 3a - b = 0$. Dans ce cas, $\text{rang}(A) = 2 < 3$, donc il y a une **infinité** de solutions (1 variable libre).

Pour $a = 1, b = 1, c = -2$: $c + 3a - b = -2 + 3 - 1 = 0 \checkmark \Rightarrow$ infinité de solutions.

Pièges fréquents

- Un système de 3 équations à 2 inconnues **n'a pas toujours** de solution : les 3 équations peuvent être incompatibles.
- Le rang d'une matrice n'est **pas toujours** compris *entre* le nombre de lignes et de colonnes :

une matrice nulle est de rang 0.

— Pour un système homogène : si $\text{rang}(A) < n$, il y a une infinité de solutions non triviales.

3 Espaces vectoriels, sous-espaces, bases et dimensions

3.1 Définitions fondamentales

Définition 3.1 (Sous-espace vectoriel). Un sous-ensemble V d'un espace vectoriel E est un **sous-espace vectoriel** (sev) si :

1. $\mathbf{0} \in V$;
2. $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} : \alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v} \in V$ (stabilité par combinaison linéaire).

Définition 3.2 (Indépendance linéaire et Suite libre). Un ensemble de vecteurs $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ est **linéairement indépendant** (forment une **suite libre**) si la seule solution à l'équation $c_1 \mathbf{v}_1 + \dots + c_n \mathbf{v}_n = \mathbf{0}$ est $c_1 = \dots = c_n = 0$.

Définition 3.3 (Suite génératrice). Un ensemble de vecteurs forme une **suite génératrice** s'il engendre l'espace entier. C'est-à-dire que tout vecteur de l'espace peut s'écrire comme une combinaison linéaire de ces vecteurs. (ex : les colonnes d'une matrice A engendrent l'espace colonne $C(A)$).

Définition 3.4 (Base et dimension). Une **base** d'un espace vectoriel E est une suite à la fois **libre** et **génératrice** de E . La **dimension** de E , notée $\dim(E)$, est le nombre d'éléments d'une base. (Théorème : la dimension d'un sous-espace V de E est toujours $\leq \dim(E)$).

3.2 Sous-espaces de polynômes $\mathbb{R}_n[x]$

$\mathbb{R}_n[x]$ désigne l'espace des polynômes à coefficients réels de degré $\leq n$. On a $\dim(\mathbb{R}_n[x]) = n + 1$.

Déterminer un sous-espace de $\mathbb{R}_n[x]$

1. Écrire $p(x) = ax^2 + bx + c$ (pour $\mathbb{R}_2[x]$).
2. Traduire la condition en relation entre a, b, c .
3. Exprimer le polynôme en fonction des paramètres libres.
4. En déduire une base et la dimension.

Sous-espaces de $\mathbb{R}_2[x]$ — récurrent

- $V = \{p \in \mathbb{R}_2[x] : p(0) = 0\}$: on a $c = 0$, donc $V = \text{sev}\langle x, x^2 \rangle$, $\dim(V) = 2$.
- $W = \{p \in \mathbb{R}_2[x] : p'(0) - p''(0) = 0\}$: $b - 2a = 0$, soit $p(x) = a(x^2 + 2x) + c$. Donc $W = \text{sev}\langle x^2 + 2x, 1 \rangle$, $\dim(W) = 2$.
- $W' = \{p \in \mathbb{R}_2[x] : p(x) = p(-x)\}$ (polynômes pairs) : $b = 0$, donc $W' = \text{sev}\langle x^2, 1 \rangle$, $\dim(W') = 2$.

3.3 Somme et somme directe

Formule de Grassmann

$$\dim(V + W) = \dim(V) + \dim(W) - \dim(V \cap W)$$

Somme directe

V et W sont en **somme directe** (notée $V \oplus W$) si et seulement si $V \cap W = \{0\}$.
 Dans ce cas : $\dim(V \oplus W) = \dim(V) + \dim(W)$.

Matrices symétriques et antisymétriques — très récurrent

Soient $S_n = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} : A^\top = A\}$ et $T_n = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} : A^\top = -A\}$.

- 1) $S_n \cap T_n = \{0\}$: si $A \in S_n \cap T_n$, alors $A^\top = A = -A$, donc $A = 0$.
- 2) $S_n + T_n = \mathbb{R}^{n \times n}$: toute matrice A se décompose :

$$A = \underbrace{\frac{A + A^\top}{2}}_{\in S_n} + \underbrace{\frac{A - A^\top}{2}}_{\in T_n}.$$

Conclusion : $S_n \oplus T_n = \mathbb{R}^{n \times n}$. De même pour les fonctions paires/impaires et les polynômes pairs/impairs.

3.4 Démontrer qu'un ensemble est un sev**Patron de démonstration — très récurrent en QO**

Pour montrer que $S \subseteq E$ est un sous-espace vectoriel :

1. $S \subseteq E$ (sous-ensemble d'un e.v. connu).
2. **Stabilité par combinaison linéaire** : $\forall s_1, s_2 \in S, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} : \alpha s_1 + \beta s_2 \in S$.

Cela implique automatiquement $0 \in S$ (prendre $\alpha = \beta = 0$).

Démontrer que S est un sev — Janvier 2022

$S = \{p \in \mathbb{R}_2[x] : p''(x) = p'(0) + p(0)\}$. Soient $q_1, q_2 \in S$:

$$(\alpha q_1 + \beta q_2)'' = \alpha q_1'' + \beta q_2'' = \alpha(q_1'(0) + q_1(0)) + \beta(q_2'(0) + q_2(0)) = (\alpha q_1 + \beta q_2)'(0) + (\alpha q_1 + \beta q_2)(0).$$

Donc $\alpha q_1 + \beta q_2 \in S$. ✓

Base : $p(x) = ax^2 + bx + c$ avec $2a = b + c$. Paramètres libres : b, c . Donc $S = \text{sev}\langle \frac{x^2}{2} + x, \frac{x^2}{2} + 1 \rangle$, $\dim(S) = 2$.

Sous-espace et noyau dans $\mathbb{R}_3[x]$ — Juin 2026

$L : \mathbb{R}_3[x] \rightarrow \mathbb{R} : p(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta \mapsto \alpha + \beta + \gamma + \delta$.

L est linéaire (car $L(p) = p(1)$, évaluation en un point).

$\text{Ker}(L) = \{p : \alpha + \beta + \gamma + \delta = 0\}$, soit $\delta = -(\alpha + \beta + \gamma)$:

$$p(x) = \alpha(x^3 - 1) + \beta(x^2 - 1) + \gamma(x - 1).$$

Base de $\text{Ker}(L) = \{x^3 - 1, x^2 - 1, x - 1\}$, $\dim(\text{Ker}(L)) = 3$.

Par le théorème du rang : $\dim(\text{Im}(L)) = 4 - 3 = 1$.

Noyau d'un opérateur sur $\mathbb{R}_3[x]$ — Juin 2026

$L : \mathbb{R}_3[x] \rightarrow \mathbb{R}_3[x] : p(x) \mapsto p'(x) - p(x)$.

Soit $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. On calcule $p'(x) - p(x) = -ax^3 + (3a - b)x^2 + (2b - c)x + (c - d)$.

Pour que $p \in \text{Ker}(L)$: $-a = 0, 3a - b = 0, 2b - c = 0, c - d = 0$, d'où $a = b = c = d = 0$.

Conclusion : $\text{Ker}(L) = \{0\}$, donc L est **injective** (et bijective car $\dim(E) = \dim(F) = 4$).

3.5 Les quatre sous-espaces fondamentaux

Quatre sous-espaces fondamentaux de $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

Sous-espace	Notation	Dimension
Espace colonne	$C(A) = \text{Im}(A) \subseteq \mathbb{R}^m$	r
Espace noyau	$N(A) = \text{Ker}(A) \subseteq \mathbb{R}^n$	$n - r$
Espace ligne	$C(A^\top) \subseteq \mathbb{R}^n$	r
Noyau à gauche	$N(A^\top) \subseteq \mathbb{R}^m$	$m - r$

où $r = \text{rang}(A)$. Relations d'orthogonalité : $C(A) \perp N(A^\top)$ et $C(A^\top) \perp N(A)$.

Sous-espaces fondamentaux via LU — Août 2019

$A = LU$ avec L triangulaire inférieure inversible et U échelonnée à 3 lignes non nulles ($n = 4$ colonnes). Alors $\text{rang}(A) = 3$, d'où : $\dim(C(A)) = 3$, $\dim(N(A)) = 4 - 3 = 1$, $\dim(C(A^\top)) = 3$, $\dim(N(A^\top)) = 3 - 3 = 0$.

3.6 Solution complète d'un système linéaire

Solution générale $Ax = b$

La solution complète d'un système linéaire s'exprime comme la somme d'une solution particulière et de toutes les solutions du système homogène (l'espace annulateur) :

$$S = \left\{ \mathbf{x}_c = \mathbf{x}_p + \sum_{i=1}^{n-r} c_i \mathbf{x}_{s_i} \right\}$$

où $\mathbf{x}_p$ est une solution particulière de $A\mathbf{x}_p = \mathbf{b}$ et les $\mathbf{x}_{s_i}$ forment une base de $N(A)$.

Cas particuliers importants :

- **Toutes les colonnes ont des pivots** ($r = n$) : Le noyau $N(A)$ est réduit à $\{0\}$. Le système admet au maximum **une seule solution** ($\mathbf{x}_c = \mathbf{x}_p$).
- **Toutes les lignes ont des pivots** ($r = m$) : Pas de lignes nulles dans la forme réduite. Le système possède toujours une solution. Si $n > m$, $\dim(N(A)) = n - m \neq 0$, donc il y a une **infinité de solutions**.

3.7 Stabilisation d'un sous-espace

Stabilisation

On dit que A **stabilise** un sous-espace F si $A(F) \subseteq F$, c'est-à-dire $\forall x \in F : A(x) \in F$.

Résultats importants :

- Si A stabilise V et A stabilise W , alors A **stabilise** $V \cap W$.
- Si $\dim(V \cap W) = 1$ et A stabilise $V \cap W$, alors tout vecteur non nul de $V \cap W$ est un vecteur propre de A (à valeur propre **réelle**).

4 Applications linéaires

4.1 Définition et vérification

Définition 4.1 (Application linéaire). $L : E \rightarrow F$ est linéaire si :

$$\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in E, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} : L(\alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v}) = \alpha L(\mathbf{u}) + \beta L(\mathbf{v}).$$

Vérifier la linéarité

1. **Test rapide** : vérifier que $L(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Si non $\Rightarrow$ pas linéaire.
2. **Test complet** : vérifier $L(\alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v}) = \alpha L(\mathbf{u}) + \beta L(\mathbf{v})$.

Applications qui sont linéaires

- La dérivation : $p(x) \mapsto p'(x)$
- L'intégration (définie) : $p(x) \mapsto \int_0^1 p(x) dx$
- L'évaluation : $p(x) \mapsto p(a)$ pour a fixé
- La trace : $A \mapsto \text{tr}(A)$
- Combinaisons des précédentes

Applications qui ne sont PAS linéaires

- Le déterminant : $A \mapsto \det(A)$, car $\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A) \neq \alpha \det(A)$.
- La valeur absolue : $x \mapsto |x|$, car $|-1| = 1 \neq -1 \cdot |1|$.
- Les applications affines : $x \mapsto 2x - 1$, car $L(0) = -1 \neq 0$.
- $T(ax^2 + bx + c) = a^n + b - cm$ n'est linéaire que si $n = m = 1$ (la puissance de a pose problème).

Vérification de linéarité — Janvier 2021

$L_1 : \mathbb{R}_n[x] \rightarrow \mathbb{R}_n[x] : p \mapsto 2x^2 p'' - x p'$ est-elle linéaire ?

Oui : $L_1(\alpha p + \beta q) = 2x^2(\alpha p + \beta q)'' - x(\alpha p + \beta q)' = \alpha(2x^2 p'' - x p') + \beta(2x^2 q'' - x q') = \alpha L_1(p) + \beta L_1(q)$.

$L_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \ln(7^{-x/5})$ est-elle linéaire ?

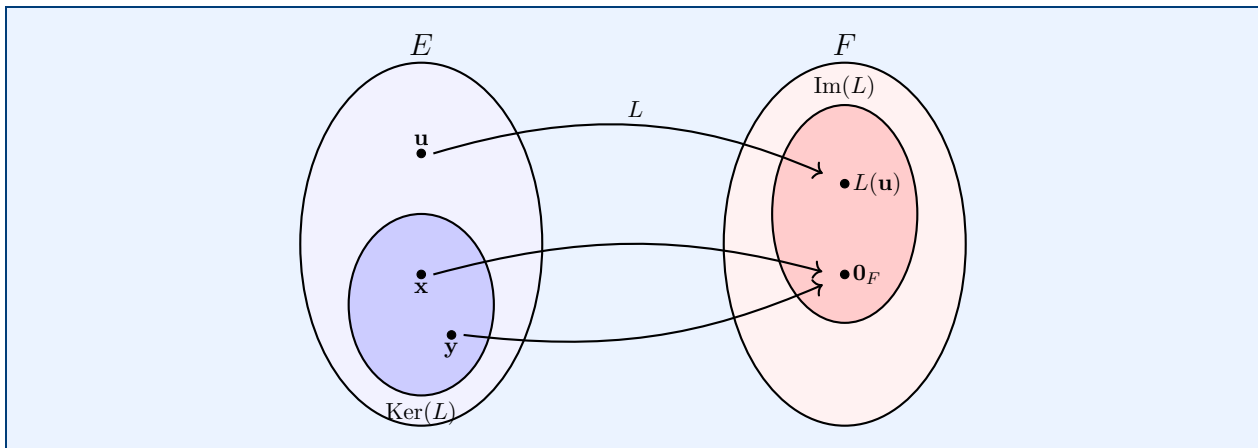
Oui : $\ln(7^{-x/5}) = \frac{-x}{5 \log_7(e)}$, c'est une fonction de la forme $L(x) = kx$ avec $k = \frac{-1}{5 \log_7(e)}$.

4.2 Noyau, Image, Injectivité, Surjectivité

Noyau et Image

Pour $L : E \rightarrow F$ linéaire :

- $\text{Ker}(L) = \{\mathbf{x} \in E : L(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}$ (sous-espace de E)
- $\text{Im}(L) = \{L(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in E\}$ (sous-espace de F)



Théorème du rang

$$\dim(\text{Ker}(L)) + \dim(\text{Im}(L)) = \dim(E)$$

Conditions équivalentes (avec $\dim(E) = n$, $\dim(F) = m$)

Injective (inversible à gauche)	Surjective (inversible à droite)
$\dim(\text{Ker}(L)) = 0$	$\dim(\text{Im}(L)) = m$
$\text{rang}(L) = n$	$\text{rang}(L) = m$

Si $n = m$: injective $\iff$ surjective $\iff$ bijective $\iff$ inversible.

Injectivité/Surjectivité — récurrent

- $L_1 : \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^4 : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto (a, b, c, d) : \text{Ker} = \{0\}, \dim(\text{Im}) = 4. \Rightarrow$ **bijective**.
- $L_2 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 : (x, y, z) \mapsto (x, y) : \text{Ker} = \text{sev}\langle(0, 0, 1)\rangle, \dim(\text{Im}) = 2. \Rightarrow$ **surjective** (pas injective).
- $L_3 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_2[x] : (a, b) \mapsto ax^2 + bx : \text{Ker} = \{(0, 0)\}, \dim(\text{Im}) = 2 \neq 3. \Rightarrow$ **injective** (pas surjective).

4.3 Unicité d'une application linéaire

Unicité

Une application linéaire $L : E \rightarrow F$ est **entièrement et uniquement déterminée** par les images des vecteurs d'une base de E .

Si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E et que $L(e_1), \dots, L(e_n)$ sont connus, alors L est unique.

Détermination de L — Janvier 2019 / Juin 2023

On connaît $\text{Ker}(L)$ et les images de certains vecteurs. Pour trouver L sur toute la base canonique, on utilise :

- Si $v \in \text{Ker}(L)$, alors $L(v) = 0$.
- On décompose chaque vecteur de base comme combinaison linéaire de vecteurs connus et on applique la linéarité.

Par exemple, si $(1, 0, 1, 1)^\top \in \text{Ker}(L)$ et $L(e_3), L(e_4)$ sont connus : $L(e_1) = L((1, 0, 1, 1)^\top - e_3 - e_4) = 0 - L(e_3) - L(e_4)$.

4.4 Inverse d'une application linéaire bijective

Linéarité de l'inverse

Si $A : E \rightarrow F$ est linéaire et bijective, alors $A^{-1} : F \rightarrow E$ est **également linéaire**.

Démonstration : Soient $u, v \in F$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Par bijectivité, $\exists x, y \in E : u = A(x), v = A(y)$.

$$A^{-1}(\alpha u + \beta v) = A^{-1}(\alpha A(x) + \beta A(y)) = A^{-1}(A(\alpha x + \beta y)) = \alpha x + \beta y = \alpha A^{-1}(u) + \beta A^{-1}(v).$$

4.5 Matrices idempotentes ($A^2 = A$)

Propriétés des matrices idempotentes

Si A est non nulle et $A^2 = A$:

1. Si $v \in C(A)$ (espace colonne), alors $Av = v$, donc v est vecteur propre de valeur propre $\lambda = 1$.
2. Les seules valeurs propres possibles sont 0 et 1.
3. A est **toujours diagonalisable** (car $\dim(C(A)) + \dim(N(A)) = n$).
4. $\text{tr}(A) = \text{rang}(A)$ (nombre de valeurs propres égales à 1).

4.6 Applications commutantes

Stabilité par commutation

Si A et B commutent ($A \circ B = B \circ A$), alors :

- $A(\text{Ker}(B)) \subseteq \text{Ker}(B)$: si $x \in \text{Ker}(B)$, alors $B(A(x)) = A(B(x)) = A(0) = 0$, donc $A(x) \in \text{Ker}(B)$.
- $A(\text{Im}(B)) \subseteq \text{Im}(B)$: si $x = B(z)$, alors $A(x) = A(B(z)) = B(A(z)) \in \text{Im}(B)$.

4.7 Lien entre $\text{Ker}(A)$, $\text{Im}(A)$ et $\text{Ker}(A^2)$

Ker/Im en somme directe et $\text{Ker}(A^2)$

Pour un opérateur $A : E \rightarrow E$:

$$\text{Ker}(A) \oplus \text{Im}(A) = E \iff \text{Ker}(A^2) = \text{Ker}(A).$$

Sens $\Rightarrow$:

- $\text{Ker}(A) \subseteq \text{Ker}(A^2)$ est toujours vrai ($A(x) = 0 \Rightarrow A^2(x) = 0$).
- Soit $x \in \text{Ker}(A^2)$: $A(x) \in \text{Ker}(A) \cap \text{Im}(A) = \{0\}$, donc $x \in \text{Ker}(A)$.

Sens $\Leftarrow$: Si $\text{Ker}(A^2) = \text{Ker}(A)$, on montre que $\text{Ker}(A) \cap \text{Im}(A) = \{0\}$, puis par le théorème du rang : $\dim(\text{Ker}(A) + \text{Im}(A)) = \dim(E)$.

5 Matrice associée à une application linéaire

5.1 Construction de la matrice ${}_f(L)_e$

Construction de ${}_f(L)_e$

Soient $e = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $f = (f_1, \dots, f_m)$ une base de F .

1. Pour chaque e_j ($j = 1, \dots, n$), calculer $L(e_j)$.
2. Exprimer $L(e_j)$ comme combinaison linéaire des f_i :

$$L(e_j) = \alpha_{1j}f_1 + \alpha_{2j}f_2 + \dots + \alpha_{mj}f_m.$$

3. Le vecteur $(\alpha_{1j}, \dots, \alpha_{mj})^\top$ forme la j -ième colonne de ${}_f(L)_e$.

Propriétés des matrices associées

$$\begin{aligned} {}_f(\alpha L_1)_e &= \alpha \cdot {}_f(L_1)_e \\ {}_f(L_1 + L_2)_e &= {}_f(L_1)_e + {}_f(L_2)_e \\ {}_g(L_3 \circ L_1)_e &= {}_g(L_3)_f \cdot {}_f(L_1)_e \end{aligned}$$

Exemple résolu — Janvier 2021

$D : \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}_1[x] : p \mapsto p'(x)$, avec $e = (1, x, x^2)$ et $f = (x, 1)$.

- $D(1) = 0 = 0 \cdot x + 0 \cdot 1 \Rightarrow$ colonne $(0, 0)^\top$
- $D(x) = 1 = 0 \cdot x + 1 \cdot 1 \Rightarrow$ colonne $(0, 1)^\top$
- $D(x^2) = 2x = 2 \cdot x + 0 \cdot 1 \Rightarrow$ colonne $(2, 0)^\top$

$${}_f(D)_e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

L'entrée $(1, 3)$ vaut 2.

Exemple avec intégrale — Juin 2021

$L : \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}^2 : p \mapsto (p(-1), p'(1) + p''(2))$, avec $e = (1, x, x^2)$, f base canonique.

- $L(1) = (1, 0) = 1f_1 + 0f_2$
- $L(x) = (-1, 1) = -1f_1 + 1f_2$
- $L(x^2) = (1, 4) = 1f_1 + 4f_2$ car $p'(1) = 2, p''(2) = 2$.

$${}_f(L)_e = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

L'entrée $(2, 3)$ vaut 4.

Application sur $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ et trace — Janvier 2026

Soit $T : \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2} : \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x & z \\ y & x + w \end{pmatrix}$.

Base canonique $e = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ et base $f = (F_1, F_2, F_3, F_4)$ avec $F_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $F_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $F_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $F_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$.
 Calcul des images de f dans la base e :

$$— T(F_1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = E_{11} + E_{12} + E_{21} + 2E_{22} \Rightarrow \text{colonne } (1, 1, 1, 2)^\top$$

$$— T(F_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = E_{21} \Rightarrow \text{colonne } (0, 0, 1, 0)^\top$$

$$— T(F_3) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 2E_{12} + E_{21} \Rightarrow \text{colonne } (0, 2, 1, 0)^\top$$

$$— T(F_4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = E_{11} + 6E_{22} \Rightarrow \text{colonne } (1, 0, 0, 6)^\top$$

$$\text{Matrice } {}_e(T)_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}. \text{ Trace } \text{tr}({}_e(T)_f) = 1 + 0 + 1 + 6 = \boxed{8}.$$

Piège : application non linéaire !

Avant de construire la matrice, **vérifier que l'application est bien linéaire**. Par exemple : $D(p) = p'(x) + 2x$ n'est **pas** linéaire car $D(0) = 2x \neq 0$. La matrice n'existe pas ! (Question Janvier 2025, bonus car moins de 5% de bonnes réponses.)

5.2 Changement de base

Matrice de passage

La **matrice de passage** (ou de transition) $M_{B' \leftarrow B}$ d'une ancienne base B vers une nouvelle base B' contient les vecteurs de l'ancienne base B exprimés dans la nouvelle base B' . Pour un vecteur $\mathbf{x}$, on a :

$$[\mathbf{x}]_{B'} = M_{B' \leftarrow B} [\mathbf{x}]_B$$

Propriétés importantes :

$$— M_{B \leftarrow B'} = (M_{B' \leftarrow B})^{-1}$$

— Si B' est la base canonique, alors $M_{B' \leftarrow B}$ a simplement les vecteurs de B en colonnes.

Changement de base d'une application linéaire

Si $L : E \rightarrow F$ a pour matrice $M_{C \leftarrow B}$ (de la base B de E vers C de F), alors sa matrice dans de nouvelles bases B' et C' s'obtient par :

$$M_{C' \leftarrow B'} = M_{C' \leftarrow C} \cdot M_{C \leftarrow B} \cdot M_{B \leftarrow B'}$$

Cas particulier (Endomorphisme $L : E \rightarrow E$) : Si on change de la base B à B' , la matrice A devient A' telle que :

$$A' = P^{-1}AP$$

où $P = M_{B \leftarrow B'}$ est la matrice de passage. On dit que A et A' sont **semblables**.

Exemple : Changement de base pour un vecteur et une application linéaire

Soit $E = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et $B = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)$ une nouvelle base définie par :

$$\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

1. Matrices de passage :

- La matrice de passage $P = M_{E \leftarrow B}$ de B vers la base canonique E s'obtient en plaçant les vecteurs de B en colonnes :

$$P = M_{E \leftarrow B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

- La matrice de passage de E vers B est son inverse $P^{-1} = M_{B \leftarrow E}$:

$$P^{-1} = M_{B \leftarrow E} = \frac{1}{1 \cdot 2 - 1 \cdot 1} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- 2. Changement de base d'un vecteur :** Soit le vecteur $\mathbf{v}$ ayant pour coordonnées $[\mathbf{v}]_E = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ dans la base canonique. Ses coordonnées dans la base B sont :

$$[\mathbf{v}]_B = M_{B \leftarrow E}[\mathbf{v}]_E = P^{-1}[\mathbf{v}]_E = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(3) - 5 \\ -(3) + 5 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}_B}.$$

$$\text{Vérification : } 1 \cdot \mathbf{b}_1 + 2 \cdot \mathbf{b}_2 = 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \mathbf{v}.$$

- 3. Changement de base d'un endomorphisme :** Soit $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ un endomorphisme dont la matrice dans la base canonique est $A = {}_E(T)_E = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Sa matrice dans la base B , notée $A' = {}_B(T)_B$, est donnée par la relation de similitude $A' = P^{-1}AP$:

$$A' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}.$$

$$\text{Invariants vérifiés : } \operatorname{tr}(A) = 2 + 3 = 5 = 3 + 2 = \operatorname{tr}(A') \text{ et } \det(A) = 6 = 3(2) - 2(0) = \det(A').$$

Similitude vs Congruence : ne pas confondre !

Il existe deux types majeurs de changements de base de matrices carrées :

- **Similitude** ($A' = P^{-1}AP$) : pour les **applications linéaires** (endomorphismes). Conservent la trace, le déterminant, le rang et les valeurs propres.
- **Congruence** ($Q' = P^T Q P$) : pour les **formes quadratiques** (et bilinéaires). Conservent la symétrie et l'inertie ($\operatorname{ind}^+, \operatorname{ind}^-, \operatorname{ind}^0$) par le Théorème de Sylvester. Le déterminant change par $\det(Q') = \det(P)^2 \det(Q)$.
- **Lien** : Si P est une matrice **orthogonale** ($P^T = P^{-1}$), alors la similitude et la congruence coïncident ! C'est ce qui rend le Théorème Spectral si puissant (diagonalisation simultanée par similitude et par congruence).

6 Déterminants

6.1 Propriétés fondamentales

Propriétés du déterminant

Soit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, avec des lignes $\ell_1, \dots, \ell_n$:

1. **Multilinéarité** : multiplier une ligne par λ multiplie le déterminant par λ .

$$\det \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \lambda \mathbf{y} \\ \mathbf{z} \end{pmatrix} = \lambda \det \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \\ \mathbf{z} \end{pmatrix}$$

2. **Alternance** : permuter deux lignes change le signe du déterminant.

$$\det \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \\ \mathbf{z} \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{x} \\ \mathbf{z} \end{pmatrix}$$

3. **Invariance par transvection** : ajouter un multiple d'une ligne à une autre ne change pas le déterminant.

$$\det \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \\ 2\mathbf{x} + \mathbf{z} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \\ \mathbf{z} \end{pmatrix}$$

4. **Permutation circulaire de 3 lignes** = 2 permutations $\Rightarrow (-1)^2 = 1$: le déterminant est inchangé.

$$\det \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \\ \mathbf{z} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{z} \\ \mathbf{x} \end{pmatrix}$$

Autres propriétés

- $\det(AB) = \det(A) \det(B)$
- $\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A)$ pour $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$
- $\det(A^\top) = \det(A)$
- $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$
- A **inversible** $\iff \det(A) \neq 0$
- $\det(A + B) \neq \det(A) + \det(B)$ en général !

Développement par cofacteurs (Laplace)

Pour calculer $\det(A)$ le long de la ligne i (ou colonne j) :

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij}$$

En pratique (la marche à suivre) :

1. **Choisir une ligne (ou colonne)** : idéalement celle qui contient le plus de zéros.
2. Pour chaque élément de cette ligne :
 - On détermine son **signe** avec la grille d'alternance $\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$ (le signe est $+1$ si $i + j$ est pair)

- pair, -1 si $i + j$ est impair).
- On **ignore (barre)** la ligne et la colonne de cet élément.
 - On calcule le **déterminant du petit bloc restant** (la sous-matrice).
 - On multiplie : Signe $\times$ Élément $\times$ Déterminant du bloc.
3. On **additionne** tous ces résultats pour obtenir le déterminant final.

Calcul d'un déterminant 3×3

Soit à calculer le déterminant de $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & -2 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$. On choisit de développer le long de la **première colonne** (car elle contient un 0) :

- 1^{er} élément (2, signe +) : on barre L1 et C1. Bloc restant $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$.
Calcul : $(+1) \cdot 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} = 2 \cdot (4 \cdot 0 - (-2) \cdot 5) = 2 \cdot 10 = 20$.
 - 2^e élément (0, signe -) : on ignore, car $0 \times \text{n'importe quoi} = 0$.
 - 3^e élément (1, signe +) : on barre L3 et C1. Bloc restant $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$.
Calcul : $(+1) \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} = 1 \cdot ((-1)(-2) - 3 \cdot 4) = 1 \cdot (2 - 12) = -10$.
- Addition : $\det(A) = 20 + 0 - 10 = \boxed{10}$.

Déterminant d'une grande matrice creuse — Janvier 2026

Soit la matrice 8×8 creuse (contenant un seul élément non nul par ligne ou colonne dans certains sous-blocs) :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad (\dots)$$

Stratégie de résolution :

1. Toujours choisir la ligne ou colonne ayant le ****plus de zéros**** (développement de Laplace).
2. Pour un bloc triangulaire par blocs ou diagonale par blocs, le déterminant est le produit des déterminants des blocs diagonaux :

$$\det \begin{pmatrix} A_1 & * \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} = \det(A_1) \cdot \det(A_2).$$

3. Ne jamais développer sur une ligne/colonne avec 3 ou 4 termes non nuls si une autre n'en contient qu'un seul !

Matrice singulière — équivalences

Les affirmations suivantes sont **équivalentes** :

- A est singulière (non inversible)
- $\det(A) = 0$

- A n'a pas d'inverse A^{-1}
- Les colonnes (ou lignes) de A sont linéairement dépendantes
- $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ n'a pas de solution unique
- 0 est une valeur propre de A
- $\text{Ker}(A) \neq \{\mathbf{0}\}$

Remarque : Puisqu'il existe un vecteur non nul x tel que $Ax = 0$, les colonnes de la matrice A sont linéairement dépendantes. La matrice carrée A n'est donc pas inversible, ce qui implique obligatoirement que son déterminant est nul ($\det(A) = 0$).

Déterminant — Janvier 2025

Soit A une matrice 6×6 creuse (beaucoup de zéros). En développant le long de la 1^{re} colonne (qui contient beaucoup de 0), puis de la dernière ligne qui n'a qu'une entrée non nulle, on obtient $\det(A) = -3$.

7 Valeurs propres, vecteurs propres et diagonalisation

7.1 Définitions

Définition 7.1 (Valeur propre et vecteur propre). Un scalaire $\lambda \in \mathbb{C}$ est une **valeur propre** de $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ s'il existe un vecteur **non nul** $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ tel que :

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} \quad \Longleftrightarrow \quad (A - \lambda I)\mathbf{v} = \mathbf{0}.$$

$\mathbf{v}$ est un **vecteur propre** associé à λ .

Pourquoi un vecteur propre ne peut PAS être nul ?

- **Trivialité algébrique** : Si le vecteur nul $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ était admis comme vecteur propre, l'égalité $A\mathbf{0} = \lambda\mathbf{0}$ ($\mathbf{0} = \mathbf{0}$) serait satisfaite pour **tout** scalaire $\lambda \in \mathbb{C}$. N'importe quel nombre serait alors valeur propre de toute matrice, rendant la notion totalement triviale et sans intérêt.
- **Sens géométrique** : Un vecteur propre définit la **direction** d'une droite vectorielle préservée par la transformation A (le vecteur subit une simple dilatation/contraction d'un facteur λ). Or, le vecteur nul $\mathbf{0}$ ne possède aucune direction.
- **Confusion fréquente (VP vs Vector Propre)** : Un **vecteur propre** ne peut jamais être nul ($\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$), mais une **valeur propre** peut parfaitement être nulle ($\lambda = 0$). Dans ce cas, $A\mathbf{v} = 0\mathbf{v} = \mathbf{0}$, ce qui signifie simplement que $\mathbf{v} \in \text{Ker}(A) \setminus \{\mathbf{0}\}$ (la matrice A n'est pas inversible).

Polynôme caractéristique

Les valeurs propres sont les racines de :

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0.$$

Pour toute matrice carrée de taille n :

- La **somme** des valeurs propres est égale à la trace : $\sum \lambda_i = \text{tr}(A)$.
- Le **produit** des valeurs propres est égal au déterminant : $\prod \lambda_i = \det(A)$.

7.2 Calcul des vecteurs propres

Méthode de calcul des valeurs et vecteurs propres

Pour calculer les valeurs propres et les vecteurs propres d'une matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$:

1. **Calculer les valeurs propres (λ)** : Résoudre l'équation caractéristique $p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0$.
2. **Calculer les vecteurs propres associés à chaque λ_i** : Pour chaque valeur propre λ_i , résoudre le système linéaire homogène :

$$(A - \lambda_i I)\mathbf{v} = \mathbf{0}.$$

Puisque $\det(A - \lambda_i I) = 0$, le système possède au moins une variable libre et admet une infinité de solutions.

3. **Déterminer l'espace propre E_{λ_i}** : Exprimer l'ensemble des solutions $E_{\lambda_i} = \text{Ker}(A - \lambda_i I)$ sous la forme d'un sous-espace engendré $\text{sev}\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$. Tout vecteur **non nul** de cet espace propre est un vecteur propre de A pour λ_i .

Exemple complet de calcul des valeurs et vecteurs propres

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

1. **Recherche des valeurs propres :**

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 4 - \lambda & 1 \\ 2 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = (4 - \lambda)(3 - \lambda) - 2 = \lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0.$$

Les racines sont $\lambda_1 = 5$ et $\lambda_2 = 2$.

2. **Recherche du vecteur propre pour $\lambda_1 = 5$** : On cherche $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ tel que $(A - 5I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff -x + y = 0 \iff y = x.$$

L'espace propre est $E_5 = \text{Ker}(A - 5I) = \text{sev}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.

En choisissant $x = 1$, un vecteur propre associé est $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \mathbf{0}$.

3. **Recherche du vecteur propre pour $\lambda_2 = 2$** : On cherche $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ tel que $(A - 2I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff 2x + y = 0 \iff y = -2x.$$

L'espace propre est $E_2 = \text{Ker}(A - 2I) = \text{sev}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right\}$.

En choisissant $x = 1$, un vecteur propre associé est $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \neq \mathbf{0}$.

Vérification : $A\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} = 5\mathbf{v}_1$ et $A\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} = 2\mathbf{v}_2$.

7.3 Multiplicités

Multiplicité algébrique et géométrique

- **Multiplicité algébrique** $m_a(\lambda)$: multiplicité de λ comme racine du polynôme caractéristique.
- **Multiplicité géométrique** $m_g(\lambda) = \dim(\text{Ker}(A - \lambda I))$: dimension de l'espace propre.
- Toujours : $1 \leq m_g(\lambda) \leq m_a(\lambda)$.

7.4 Diagonalisation

Condition de diagonalisabilité

A est **diagonalisable par similitude** si et seulement si :

$$\forall \lambda_i : m_g(\lambda_i) = m_a(\lambda_i).$$

Cas suffisants :

- A a n valeurs propres **distinctes** $\Rightarrow$ diagonalisable.
- A est **symétrique** ($A = A^T$) $\Rightarrow$ toujours diagonalisable (vp réelles, vecteurs propres orthogonaux).

Diagonalisation : $A = XDX^{-1}$

- X : matrice dont les colonnes sont les vecteurs propres.
- D : matrice diagonale des valeurs propres correspondantes.
- Vérification rapide : $AX = XD$ (chaque colonne de AX est λ_i fois la colonne correspondante de X).

Propriétés des valeurs propres

Si $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$:

- $(A + \alpha I)\mathbf{v} = (\lambda + \alpha)\mathbf{v}$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.
- $A^2\mathbf{v} = \lambda^2\mathbf{v}$, et plus généralement $A^k\mathbf{v} = \lambda^k\mathbf{v}$.
- A inversible $\iff$ aucune valeur propre n'est nulle $\iff \det(A) \neq 0$.
- Si $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ avec n **impair**, alors A possède **toujours** au moins une valeur propre **réelle** (car les vp complexes viennent par paires conjuguées, et un polynôme de degré impair a toujours au moins une racine réelle).

Polynôme d'une matrice diagonalisable

Si $A = PDP^{-1}$ est diagonalisable et f est un polynôme quelconque, alors :

$$f(A) = P f(D) P^{-1}, \quad \text{où } f(D) = \text{diag}(f(\lambda_1), \dots, f(\lambda_n)).$$

Conséquence importante : **tout polynôme d'une matrice diagonalisable est lui-même diagonalisable** (dans la même base propre).

Polynôme de matrice — Juin 2026

Soit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ diagonalisable. La matrice $B = A^5 + 2A^3 - A + I$ est-elle diagonalisable ?

Oui : puisque $A = PDP^{-1}$, on a $B = P(D^5 + 2D^3 - D + I)P^{-1}$. La matrice $D' = D^5 + 2D^3 - D + I$ est diagonale, donc B est diagonalisable.

7.5 Forme de Jordan

Lecture de la forme de Jordan

Si A est sous forme canonique de Jordan :

- $m_a(\lambda)$ = nombre de fois que λ apparaît sur la diagonale.
- $m_g(\lambda)$ = nombre de **blocs** de Jordan associés à λ .
- A diagonalisable $\iff$ tous les blocs sont de taille 1×1 (forme diagonale).

Forme de Jordan — Août 2022

$$A = \begin{pmatrix} 2 & & & & & \\ & 2 & 1 & & & \\ & & 2 & & & \\ & & & 3 & 1 & \\ & & & & 3 & 1 \\ & & & & & 3 \\ & & & & & & 4 \\ & & & & & & & 4 \end{pmatrix}$$

- $\lambda_1 = 2$: 3 apparitions, 2 blocs ($J_1(2)$ et $J_2(2)$) $\Rightarrow m_a = 3, m_g = 2$.
- $\lambda_2 = 3$: 3 apparitions, 1 bloc $J_3(3)$ $\Rightarrow m_a = 3, m_g = 1$.
- $\lambda_3 = 4$: 2 apparitions, 2 blocs $J_1(4)$ $\Rightarrow m_a = 2, m_g = 2$.

A n'est **pas** diagonalisable car $m_g(2) < m_a(2)$ et $m_g(3) < m_a(3)$.

Pièges sur la diagonalisabilité

- Une vp de multiplicité algébrique 2 **ne signifie pas** que la matrice n'est pas diagonalisable : il faut vérifier si $m_g = m_a$.
- Le polynôme caractéristique seul ne suffit **pas** à conclure si $m_a > 1$ pour une vp.
- **Matrice compagnon** : toutes les vp ont $m_g = 1$, donc non diagonalisable si une vp a $m_a \geq 2$.
- **Diagonalisable sans calcul** : une matrice **symétrique** est **toujours** diagonalisable (par le théorème spectral), sans besoin de calculer les vp.

7.6 Théorème de Cayley-Hamilton

Théorème de Cayley-Hamilton

Toute matrice carrée $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ **satisfait son propre polynôme caractéristique**. Autrement dit, si $p_A(\lambda) = \det(\lambda I - A)$, alors :

$$p_A(A) = 0.$$

Applications :

- Si toutes les valeurs propres de A sont nulles, alors $p_A(\lambda) = \lambda^n$, donc $A^n = 0$: A est

nilpotente.

- Permet de calculer A^{-1} comme polynôme en A : par exemple pour $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, $A^2 - \text{tr}(A)A + \det(A)I = 0$, d'où $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}(\text{tr}(A)I - A)$.

7.7 Matrices de rang 1

Valeurs propres d'une matrice de rang 1

Si $A = uv^\top$ ($u, v \in \mathbb{R}^n$), alors :

- $\text{rang}(A) = 1 \Rightarrow \dim(N(A)) = n - 1 \Rightarrow$ valeur propre $\lambda = 0$ de multiplicité $n - 1$.
- La dernière valeur propre vaut $\text{tr}(A) = v^\top u$ (car $\sum \lambda_i = \text{tr}(A)$).
- A est diagonalisable (car $m_g(0) = n - 1 = m_a(0)$).
- Vecteur propre associé à $\text{tr}(A)$: u lui-même ($Au = u(v^\top u) = \text{tr}(A) \cdot u$).

Matrice de rang 1 — Janvier 2020

$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Sans calculer A :

- $\text{rang}(A) = 1 \Rightarrow$ valeur propre 0 de multiplicité géométrique 2.
- $\text{tr}(A) = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 = 6 \Rightarrow$ troisième vp = 6.
- A est diagonalisable car $m_g(0) = 2 = m_a(0)$ et $m_g(6) = 1 = m_a(6)$.

7.8 Vecteurs propres de matrices symétriques

Orthogonalité des vecteurs propres

Si A est **symétrique** ($A = A^\top$) :

1. Toutes les valeurs propres sont **réelles**.
2. Les vecteurs propres associés à des **valeurs propres distinctes** sont **orthogonaux**.

Preuve de 2 : Soient $Au = \lambda u$ et $Av = \mu v$ avec $\lambda \neq \mu$.

$$u^\top Av = \mu u^\top v \quad \text{et} \quad v^\top Au = \lambda v^\top u.$$

Or $u^\top Av = v^\top A^\top u = v^\top Au$, donc $(\mu - \lambda)u^\top v = 0$. Comme $\mu \neq \lambda$, on a $u^\top v = 0$.

7.9 Comportement asymptotique de A^k

Limite de A^k pour une matrice diagonalisable

Si $A = PDP^{-1}$ avec $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, alors :

$$A^k = PD^k P^{-1} = P \text{diag}(\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k) P^{-1}.$$

$\lim_{k \rightarrow \infty} A^k$ existe si et seulement si $|\lambda_i| \leq 1$ pour tout i , et $|\lambda_i| = 1 \Rightarrow \lambda_i = 1$.

Blocs de Jordan : $\lim_{k \rightarrow \infty} J_m(\lambda)^k = 0$ si $|\lambda| < 1$.

Comportement asymptotique (QO Janvier 2023 — Génétique des tomates)

On modélise l'évolution de génotypes (RR, jj, Rj) par un système de récurrence $x[k+1] = Ax[k]$. La matrice de transition obtenue est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

1. Diagonalisation : La matrice est triangulaire supérieure, donc ses valeurs propres sont sur la diagonale : $\lambda_1 = 1$ ($m_a = 2$) et $\lambda_2 = 1/2$ ($m_a = 1$). Pour justifier qu'elle est diagonalisable, il faut s'assurer que $m_g(1) = 2$.

$$A - I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

L'espace nul $N(A - I)$ est défini par $v_3 = 0$. Les variables v_1 et v_2 sont libres. On a donc $N(A - I) = \text{sev}\langle (1, 0, 0)^\top, (0, 1, 0)^\top \rangle$. Ainsi, $m_g(1) = 2 = m_a(1)$, la matrice est bien diagonalisable. Pour $\lambda_2 = 1/2$, on trouve le vecteur propre $(-1/2, -1/2, 1)^\top$.

On construit la base P et on inverse (ici par méthode des cofacteurs ou Gauss) :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Évolution asymptotique : On étudie la limite $\lim_{k \rightarrow \infty} x[k] = \lim_{k \rightarrow \infty} A^k x_0$. Puisque $(1/2)^k \rightarrow 0$, D^k tend vers $\text{diag}(1, 1, 0)$.

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} A^k x_0 &= P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} x_0 \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 + y_3/2 \\ y_2 + y_3/2 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Conclusion biologique : À long terme, la population hétérozygote (Rj, composante 3) disparaît. Sa proportion initiale se répartit équitablement entre les deux types d'homozygotes (RR et jj).

7.10 Chaînes de Markov et Matrices stochastiques

Définition 7.2 (Matrice stochastique). Une matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est dite **stochastique** (par colonnes ou par lignes) si :

1. Toutes ses entrées sont non négatives ($A_{ij} \geq 0$).
2. La somme des éléments de chaque colonne (ou de chaque ligne) vaut 1.

Propriétés fondamentales des matrices stochastiques

— **Valeur propre 1 :** 1 est **toujours** une valeur propre de A .

- Si la somme des *lignes* vaut 1, le vecteur propre associé à $\lambda = 1$ est $\mathbf{e} = (1, 1, \dots, 1)^\top$ (car $A\mathbf{e} = 1 \cdot \mathbf{e}$).
- Si la somme des *colonnes* vaut 1, la transposée $A^\top$ a pour vecteur propre $\mathbf{e}$, et A possède un vecteur propre π à composantes positives ($\sum \pi_i = 1$) appelé **distribution**.

stationnaire : $A\pi = \pi$.

- **Bornitude des valeurs propres** : Toute valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$ satisfait $|\lambda| \leq 1$.
- **Convergence vers l'état stationnaire** : Si A est régularisée (toutes les entrées de A^k strictement positives pour un k), alors pour tout état initial $\mathbf{x}_0$, $\lim_{k \rightarrow \infty} A^k \mathbf{x}_0 = \pi$.

Application stochastique — Modèle épidémiologique / transition

Soit une matrice de transition jour par jour entre 2 états (Sain S , Infecté I) :

$$A = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0.7 \end{pmatrix}.$$

Chaque colonne somme à 1.

1. **Valeurs propres** : $\text{tr}(A) = 1.5$, $\det(A) = 0.56 - 0.06 = 0.50$.

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = \text{tr}(A) - 1 = 0.5.$$

2. **État stationnaire** $\pi = (\pi_1, \pi_2)^\top$: $(A - I)\pi = \mathbf{0} \implies -0.2\pi_1 + 0.3\pi_2 = 0 \implies \pi_1 = \frac{3}{2}\pi_2$.
Comme $\pi_1 + \pi_2 = 1 \implies \frac{5}{2}\pi_2 = 1 \implies \pi_2 = \frac{2}{5} = 0.4$, $\pi_1 = 0.6$.

3. **Conclusion** : À long terme, 60% de la population est saine et 40% est infectée.

8 Trace et propriétés des matrices

Propriétés de la trace

Pour $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$:

$$\text{tr}(A + B) = \text{tr}(A) + \text{tr}(B)$$

$$\text{tr}(\alpha A) = \alpha \text{tr}(A)$$

$$\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$$

$$\text{tr}(BAB^{-1}) = \text{tr}(A) \quad (\text{invariance par similitude})$$

Attention : $\text{tr}(AB) \neq \text{tr}(A) \cdot \text{tr}(B)$ en général !

Contre-exemple : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$: $\text{tr}(A)\text{tr}(B) = 0$ mais $\text{tr}(AB) = 1$.

Théorème Spectral et de Schur

Théorème Spectral : Toute matrice symétrique $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est diagonalisable par similitude et par congruence via une matrice orthogonale Q (telle que $Q^{-1} = Q^\top$) :

$$S = Q\Lambda Q^{-1} = Q\Lambda Q^\top$$

où Λ est la matrice diagonale des valeurs propres (qui sont toujours réelles).

Théorème de Schur : On peut généraliser ce concept à l'ensemble des matrices carrées, moyennant une concession : toute matrice carrée A (dont les valeurs propres sont réelles) peut s'écrire sous la forme $A = QUQ^{-1} = QUQ^\top$, où Q est une matrice orthogonale et U est une matrice triangulaire supérieure.

Application du théorème spectral

Soit la matrice symétrique $S = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. D'après le théorème spectral, S est diagonalisable via une matrice orthogonale.

— Valeurs propres : $\lambda_1 = 3$ et $\lambda_2 = 1$.

— Vecteurs propres : $v_1 = (1, 1)^\top$ et $v_2 = (-1, 1)^\top$.

On remarque que $v_1^\top v_2 = 0$ (les espaces propres d'une matrice symétrique sont orthogonaux).

Pour obtenir Q , on **normalise** les vecteurs propres : $u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. La matrice $Q = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ est bien orthogonale ($Q^\top = Q^{-1}$), et on a :

$$S = Q \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} Q^\top.$$

Cette décomposition est très utile, par exemple, pour diagonaliser des formes quadratiques via un changement de variable isométrique (qui conserve les distances et les angles).

Propriétés des matrices symétriques

Soit $A = A^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$:

1. A est **toujours diagonalisable**.
2. Toutes les valeurs propres sont **réelles**.
3. Les espaces propres sont **orthogonaux** deux à deux.
4. $A = QDQ^\top$ avec Q orthogonale ($Q^{-1} = Q^\top$).
5. A^k est symétrique pour tout $k \in \mathbb{N}$.
6. A symétrique **n'implique pas** A inversible (ex. : la matrice nulle).
7. n vp réelles + n vecteurs propres **orthogonaux** $\Rightarrow A$ symétrique.
8. n vp réelles + n vecteurs propres réels $\nRightarrow A$ symétrique (contre-ex. : matrice triangulaire).

Matrices nilpotentes

A est nilpotente si $\exists k \in \mathbb{N} : A^k = 0$.

- La seule matrice nilpotente **diagonalisable** est la matrice nulle.
- Si A est symétrique et $A^k = 0$, alors $A = 0$ (car symétrique $\Rightarrow$ diagonalisable).
- A est nilpotente $\iff$ toutes ses valeurs propres sont nulles (par Cayley-Hamilton).
- Si $C(A) \subseteq N(A)$, alors $A^2 = 0$ (car tout $Ax \in C(A) \subseteq N(A)$, donc $A(Ax) = 0$).

Démonstration : nilpotente $\Rightarrow$ toutes VP nulles — Janvier 2026

Preuve préliminaire : Si $Av = \lambda v$, alors $A^k v = \lambda^k v$ (par récurrence : $A^{k+1}v = A(A^k v) = A(\lambda^k v) = \lambda^k Av = \lambda^{k+1}v$).

Preuve par l'absurde : Supposons A nilpotente ($A^m = 0$) et $\lambda \neq 0$ valeur propre avec vecteur propre $v \neq 0$. Alors $A^m v = \lambda^m v$. Mais $A^m = 0$ implique $0 = \lambda^m v$. Comme $v \neq 0$ et $\lambda^m \neq 0$: contradiction. ■

Matrice nilpotente et exponentielle — Janvier 2026

Soit $A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Vérification : $A^2 = 0$ (calcul direct), donc A est nilpotente.

Exponentielle : $e^A = I + A = \begin{pmatrix} 3/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

9 Formes quadratiques

9.1 Matrice associée

Construction de la matrice Q

Pour une forme quadratique $q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\top Q \mathbf{x}$, la matrice Q est **symétrique** :

- Les termes diagonaux : Q_{ii} = coefficient de x_i^2 .
- Les termes hors-diagonaux : $Q_{ij} = Q_{ji} = \frac{1}{2} \times$ coefficient de $x_i x_j$.

Exemple : $q(x, y, z) = x^2 + 6xy + 4y^2 + 2yz - 9z^2$ donne :

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -9 \end{pmatrix}.$$

Attention au facteur $\frac{1}{2}$: le coefficient de $6xy$ donne $Q_{12} = Q_{21} = 3$, pas 6.

9.2 Méthodes de diagonalisation

Méthode 1 : Factorisation $LDL^\top$ (congruence)

Quand l'utiliser ? Méthode systématique et rapide pour trouver l'inertie (signature) d'une forme quadratique, ou pour discuter de son signe en fonction d'un paramètre. Elle est très efficace pour les matrices 3×3 ou plus sans avoir à chercher de racines de polynômes.

1. Écrire la matrice symétrique Q .
2. Appliquer des opérations élémentaires **simultanément sur les lignes et les colonnes** :
 - $L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$ **et** $C_i \leftarrow C_i + \alpha C_j$ (même coefficient, mêmes indices).
3. La matrice diagonale D obtenue donne les indices d'inertie via le signe de ses éléments diagonaux.

Application Méthode 1 — $LDL^\top$ — Août 2022

$q(x, y, z) = -x^2 + 4xz + 4y^2 + 24yz + 32z^2$. Matrice :

$$Q = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 12 \\ 2 & 12 & 32 \end{pmatrix}$$

Opérations :

$$\xrightarrow{L_3+2L_1, C_3+2C_1} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 12 \\ 0 & 12 & 36 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3-3L_2, C_3-3C_2} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Résultat : $D = \text{diag}(-1, 4, 0)$, donc $\text{ind}^+ = 1$, $\text{ind}^- = 1$, $\text{ind}^0 = 1$. La forme est **indéfinie**.

Méthode 2 : Complétion des carrés

Quand l'utiliser ? À privilégier lorsque la forme quadratique possède peu de termes croisés, ou lorsqu'on cherche explicitement les combinaisons linéaires qui servent de nouvelles variables. Elle évite de passer par l'écriture matricielle.

Regrouper les termes pour obtenir une somme de carrés (avec coefficients) :

$$q(\mathbf{x}) = \alpha_1 X_1^2 + \alpha_2 X_2^2 + \cdots + \alpha_n X_n^2$$

où les X_i sont des combinaisons linéaires des variables de départ. Les signes des coefficients α_i fournissent l'inertie.

Application Méthode 2 — Complétion des carrés — Janvier 2023

$$q(x, y, z) = 25x^2 + 20xy - 50xz + 5y^2 - 28yz + 47z^2.$$

Par complétion successive :

$$q = (5x + 2y - 5z)^2 + (y - 4z)^2 + 6z^2.$$

On obtient trois carrés avec coefficients positifs $\Rightarrow \text{ind}^+ = 3$, $\text{ind}^- = 0$. Forme **définie positive**.

Méthode 3 : Diagonalisation par similitude (Valeurs propres)

Quand l'utiliser ? Indispensable quand on a besoin des valeurs propres exactes, ou lorsqu'on cherche un changement de variable **isométrique** (rotation, via une matrice orthogonale Q) pour conserver les distances et les angles. C'est la méthode de choix pour identifier la nature géométrique précise d'une conique ou d'une quadrique (axes principaux).

Calculer les valeurs propres de la matrice symétrique Q . Par le théorème spectral, Q est diagonalisable orthogonalement ($Q = PDP^\top$), et dans la nouvelle base orthonormée, la forme devient :

$$q(\mathbf{y}) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$$

Les signes des valeurs propres λ_i donnent directement l'inertie.

Application Méthode 3 — Diagonalisation par similitude

$q(x, y) = 5x^2 + 4xy + 2y^2$. Matrice symétrique associée :

$$Q = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Polynôme caractéristique : $\det(Q - \lambda I) = (5 - \lambda)(2 - \lambda) - 4 = \lambda^2 - 7\lambda + 6 = (\lambda - 6)(\lambda - 1) = 0$. Valeurs propres : $\lambda_1 = 6$ et $\lambda_2 = 1$. Puisque les deux valeurs propres sont strictement positives, $\text{ind}^+ = 2$ et $\text{ind}^- = 0$. La forme est **définie positive**. Dans la base principale (constituée des vecteurs propres normalisés), l'équation de la forme est tout simplement $q(X, Y) = 6X^2 + Y^2$.

9.3 Classification

Théorème d'inertie de Sylvester

Les indices de positivité (ind^+), de négativité (ind^-) et de nullité (ind^0) sont **invariants** quelle que soit la méthode de diagonalisation.

$$\text{rang}(q) = \text{ind}^+ + \text{ind}^-.$$

Classification des formes quadratiques

Type	Condition	Signification
Définie positive	$\text{ind}^+ = n, \text{ind}^- = 0$	$q(\mathbf{x}) > 0 \forall \mathbf{x} \neq 0$
Semi-définie positive	$\text{ind}^+ + \text{ind}^0 = n, \text{ind}^- = 0$	$q(\mathbf{x}) \geq 0 \forall \mathbf{x}$
Définie négative	$\text{ind}^- = n, \text{ind}^+ = 0$	$q(\mathbf{x}) < 0 \forall \mathbf{x} \neq 0$
Indéfinie	$\text{ind}^+ \geq 1 \text{ et } \text{ind}^- \geq 1$	q change de signe

9.4 Discussion de l'inertie en fonction d'un paramètre

Factorisation $LDL^\top$ pour l'inertie

Pour une matrice symétrique S dépendant d'un paramètre, on applique des opérations **congruentes** (même opération sur lignes ET colonnes) pour obtenir $D = L^{-1}S(L^\top)^{-1}$ diagonale. Par **Sylvester**, S et D ont la même inertie.

Inertie paramétrique — Janvier 2024

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & a \\ 4 & a & 21 \end{pmatrix}. \text{ Par opérations congruentes :}$$

$$S \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 - a^2/5 \end{pmatrix}.$$

Deux premières vp positives. La troisième : > 0 si $|a| < 5$, $= 0$ si $a = \pm 5$, < 0 si $|a| > 5$.

9.5 Quadriques

Complétion du carré pour les quadriques

Soit $Q = \{x \in \mathbb{R}^n : x^\top Ax + b^\top x + c = 0\}$ avec A symétrique définie positive.

Changement de variable $y = x - x_0$ avec $x_0 = -\frac{1}{2}A^{-1}b$:

$$x^\top Ax + b^\top x + c = y^\top Ay + d \quad \text{où} \quad d = c - \frac{1}{4}b^\top A^{-1}b.$$

Par congruence avec I (A déf. pos.) : $y^\top Ay + d = 0 \iff z_1^2 + \dots + z_n^2 + d = 0$.

- $d > 0$: $Q = \emptyset$ (pas de solution).
- $d = 0$: un unique point ($x = x_0$).
- $d < 0$: infinité de solutions (ellipsoïde).

9.6 Forme $x^\top Mx$ comme produit scalaire

Lien forme quadratique / produit scalaire

La forme $(x | y) = x^\top My$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$ si et seulement si M est **symétrique définie positive**.

- Bilinearité : automatique par le produit matriciel.
- Symétrie : $\iff M = M^\top$.
- Définie positive : $\iff$ toutes les vp de M sont > 0 .

9.7 Formes bilinéaires et Matrice de Gram

Formes bilinéaires et représentations

Une application $B : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ est une **forme bilinéaire** si elle est linéaire en chaque argument. Dans une base $e = (e_1, \dots, e_n)$, elle s'écrit sous forme matricielle :

$$B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = [\mathbf{x}]_e^\top M [\mathbf{y}]_e, \quad \text{où } M_{ij} = B(e_i, e_j).$$

- B est **symétrique** $\iff M = M^\top$. Sa forme quadratique associée est $q(\mathbf{x}) = B(\mathbf{x}, \mathbf{x})$.
- Lors d'un changement de base vers e' via la matrice de passage P , la matrice M devient $M' = P^\top M P$ (**congruence**).

Matrice de Gram et Gramien

Soit un espace préhilbertien $(E, (\cdot | \cdot))$ et une famille de vecteurs $(v_1, v_2, \dots, v_k)$. La **matrice de Gram** associée est la matrice symétrique $G \in \mathbb{R}^{k \times k}$ définie par :

$$G_{ij} = (v_i | v_j).$$

Son déterminant $\det(G)$ est appelé le **Gramien** de la famille.

Propriétés clés :

1. G est toujours **semi-définie positive**.
2. La famille $(v_1, \dots, v_k)$ est **linéairement indépendante** $\iff \det(G) > 0 \iff G$ est **définie positive**.
3. Si $(v_1, \dots, v_k)$ est une base d'un sous-espace V , la matrice de la projection orthogonale P_V s'écrit $P_V = AG^{-1}A^\top$ où $A = [v_1 \dots v_k]$.

10 Produit scalaire, Gram-Schmidt et projections

10.1 Produit scalaire

Définition 10.1 (Produit scalaire). Un produit scalaire sur E est une application $(\cdot | \cdot) : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ qui est :

1. **Bilinéaire** : linéaire en chaque argument.
2. **Symétrique** : $(\mathbf{x} | \mathbf{y}) = (\mathbf{y} | \mathbf{x})$.
3. **Définie positive** : $(\mathbf{x} | \mathbf{x}) > 0$ pour tout $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$.

Sous forme matricielle : $(\mathbf{x} | \mathbf{y}) = \mathbf{x}^\top M \mathbf{y}$, où M est symétrique définie positive.

Définition 10.2 (Norme et Distance induites). — **Norme** : $\|x\| = \sqrt{(x|x)}$. Propriétés axiomatiques : $\|x\| \geq 0$, $\|x\| = 0 \iff x = 0$, $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$, et l'**inégalité triangulaire** $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

— **Distance** : $d(x, y) = \|x - y\|$. Propriétés axiomatiques : $d(x, y) \geq 0$, $d(x, y) = 0 \iff x = y$, symétrie ($d(x, y) = d(y, x)$), et l'**inégalité triangulaire** ($d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$).

Vérifier si c'est un produit scalaire

Contre-exemples fréquents :

- $(\mathbf{x} | \mathbf{y}) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_2$: **pas symétrique** (car $(\mathbf{x} | \mathbf{y}) \neq (\mathbf{y} | \mathbf{x})$).
- $(\mathbf{x} | \mathbf{y}) = x_1y_2 - x_2y_1$: **pas définie positive** ($((1, 1) | (1, 1)) = 0$).
- $(\mathbf{x} | \mathbf{y}) = x_1^2y_1^2 + x_2^2y_2^2$: **pas bilinéaire** ($(\alpha\mathbf{x} | \mathbf{y}) = \alpha^2(\mathbf{x} | \mathbf{y}) \neq \alpha(\mathbf{x} | \mathbf{y})$).
- Si M n'est pas symétrique $\Rightarrow$ **pas un produit scalaire**.

Démonstration théorique — Inégalité de Cauchy-Schwarz

Énoncé : Pour tous $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$, $|(\mathbf{x} | \mathbf{y})| \leq \|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|$.

Démonstration (Classique des QO) :

1. Si $\mathbf{y} = \mathbf{0}$, l'égalité $0 = 0$ est triviale.
2. Si $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$, considérons pour tout $t \in \mathbb{R}$ la norme au carré du vecteur $\mathbf{x} + t\mathbf{y}$:

$$P(t) = \|\mathbf{x} + t\mathbf{y}\|^2 = (\mathbf{x} + t\mathbf{y} | \mathbf{x} + t\mathbf{y}) = \|\mathbf{x}\|^2 + 2t(\mathbf{x} | \mathbf{y}) + t^2\|\mathbf{y}\|^2.$$

Par définition d'une norme, $P(t) \geq 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

3. $P(t)$ est un trinôme du second degré en t de la forme $at^2 + bt + c$ avec $a = \|\mathbf{y}\|^2 > 0$, $b = 2(\mathbf{x} | \mathbf{y})$ et $c = \|\mathbf{x}\|^2$.
4. Puisque $P(t) \geq 0$ pour tout t , ce trinôme ne peut avoir au plus qu'une seule racine réelle. Son discriminant réduit Δ' doit donc être non positif :

$$\Delta' = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac = (\mathbf{x} | \mathbf{y})^2 - \|\mathbf{x}\|^2\|\mathbf{y}\|^2 \leq 0.$$

D'où $(\mathbf{x} | \mathbf{y})^2 \leq \|\mathbf{x}\|^2\|\mathbf{y}\|^2$, ce qui donne $|(\mathbf{x} | \mathbf{y})| \leq \|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|$. ■

Démonstration théorique — Inégalité triangulaire

Énoncé : Pour tous $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$, $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$.

Démonstration :

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 &= (\mathbf{x} + \mathbf{y} | \mathbf{x} + \mathbf{y}) = \|\mathbf{x}\|^2 + 2(\mathbf{x} | \mathbf{y}) + \|\mathbf{y}\|^2 \\ &\leq \|\mathbf{x}\|^2 + 2|(\mathbf{x} | \mathbf{y})| + \|\mathbf{y}\|^2 \\ &\leq \|\mathbf{x}\|^2 + 2\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\| + \|\mathbf{y}\|^2 \quad (\text{par Cauchy-Schwarz}) \\ &= (\|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|)^2. \end{aligned}$$

En prenant la racine carrée des deux côtés (puisque les normes sont positives), on obtient $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$. ■

10.2 Gram-Schmidt

Procédure de Gram-Schmidt (avec produit scalaire général)

Soit $(v_1, \dots, v_n)$ une base quelconque et $(\cdot | \cdot)$ un produit scalaire (pas forcément canonique).

1. $u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}$, où $\|v_1\| = \sqrt{(v_1 | v_1)}$.

2. Pour $k = 2, \dots, n$:

$$\tilde{u}_k = v_k - \sum_{j=1}^{k-1} (v_k | u_j) u_j, \quad u_k = \frac{\tilde{u}_k}{\|\tilde{u}_k\|}.$$

Important : utiliser le produit scalaire **défini dans l'énoncé**, pas le produit canonique !

Gram-Schmidt avec P.S. non canonique — Août 2021 / Août 2024

$(\mathbf{x} | \mathbf{y}) = 4x_1y_1 + x_1y_2 + y_1x_2 + x_2y_2$ sur $\mathbb{R}^2$. Base canonique $v_1 = (1, 0)^\top$, $v_2 = (0, 1)^\top$.

— $\|v_1\|^2 = (v_1 | v_1) = 4 \Rightarrow u_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

— $(v_2 | u_1) = \frac{1}{2}(0 \cdot 4 + 0 + 1 + 0) = \frac{1}{2} \cdot 1 = 1$. $\tilde{u}_2 = v_2 - 1 \cdot u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.
 $\|\tilde{u}_2\|^2 = \frac{1}{4}((-1) | (-1)) \cdot 4 + (-1)(2) + 2(-1) + 4 = \frac{1}{4}(4 - 2 - 2 + 4) = \frac{1}{4} \cdot 4 \cdot \frac{3}{4} \dots$ On calcule : $\|\tilde{u}_2\| = \frac{\sqrt{3}}{2}$, donc $u_2 = \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Réponse : $u_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $u_2 = \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Gram-Schmidt 3D avec produit scalaire canonique

Base initiale dans $\mathbb{R}^3$: $v_1 = (1, 1, 0)^\top$, $v_2 = (1, 0, 1)^\top$, $v_3 = (0, 1, 1)^\top$. On utilise le produit scalaire standard (produit point).

1. Premier vecteur :

$$\|v_1\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{2} \Rightarrow u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

2. Deuxième vecteur :

$$(v_2 | u_1) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$\tilde{u}_2 = v_2 - (v_2 | u_1)u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\|\tilde{u}_2\| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 1} = \sqrt{\frac{6}{4}} = \frac{\sqrt{6}}{2} \Rightarrow u_2 = \frac{\tilde{u}_2}{\|\tilde{u}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

3. Troisième vecteur :

$$(v_3 | u_1) = \frac{1}{\sqrt{2}}(0 + 1 + 0) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad (v_3 | u_2) = \frac{1}{\sqrt{6}}(0 - 1 + 2) = \frac{1}{\sqrt{6}}.$$

$$\tilde{u}_3 = v_3 - (v_3 | u_1)u_1 - (v_3 | u_2)u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}.$$

$$\|\tilde{u}_3\| = \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{4}{9} + \frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{12}}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \Rightarrow u_3 = \frac{\tilde{u}_3}{\|\tilde{u}_3\|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Réponse finale : la base orthonormée est (u_1, u_2, u_3) .

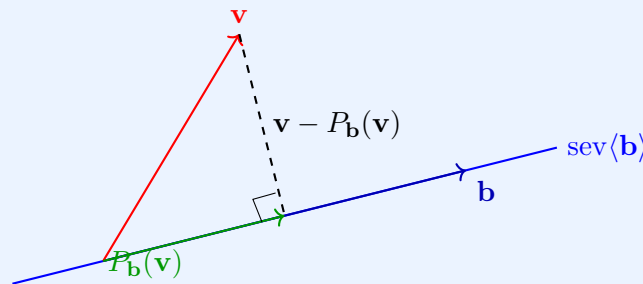
10.3 Projections orthogonales

Projection sur une droite

La projection de $\mathbf{v}$ sur la droite engendrée par $\mathbf{b}$ (passant par l'origine) :

$$P_{\mathbf{b}}(\mathbf{v}) = \frac{\mathbf{b}^\top \mathbf{v}}{\mathbf{b}^\top \mathbf{b}} \mathbf{b}, \quad \|P_{\mathbf{b}}(\mathbf{v})\| = \frac{|\mathbf{b}^\top \mathbf{v}|}{\|\mathbf{b}\|}.$$

Matrice de projection : $P_b = \frac{\mathbf{b}\mathbf{b}^\top}{\mathbf{b}^\top \mathbf{b}}.$



Projection sur un plan

Si $\Pi = \{\mathbf{x} : \mathbf{n}^\top \mathbf{x} = 0\}$ est un plan passant par l'origine de normale $\mathbf{n}$:

$$\text{proj}_{\Pi}(\mathbf{v}) = \mathbf{v} - \text{proj}_{\mathbf{n}}(\mathbf{v}) = \mathbf{v} - \frac{\mathbf{n}^\top \mathbf{v}}{\mathbf{n}^\top \mathbf{n}} \mathbf{n}.$$

Matrice de projection générale

Pour projeter sur le sous-espace V engendré par les colonnes d'une matrice A (en supposant les colonnes de A linéairement indépendantes) :

$$P_V = A(A^\top A)^{-1} A^\top$$

Propriétés fondamentales de toute matrice de projection P : elle est **symétrique** ($P^\top = P$) et **idempotente** ($P^2 = P$).

Projection avec base orthonormée

Si $(\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_k)$ est une **base orthonormée** du sous-espace V , alors en posant $Q = [\mathbf{q}_1 \dots \mathbf{q}_k]$, on a $Q^\top Q = I_k$, et la matrice de projection se simplifie en :

$$P_V = QQ^\top = \sum_{i=1}^k \mathbf{q}_i \mathbf{q}_i^\top.$$

La projection de tout élément $\mathbf{v}$ (vecteur, polynôme ou matrice) sur le sous-espace V s'obtient directement par la somme des projections scalaires sur chaque vecteur de base :

$$P_V(\mathbf{v}) = \sum_{i=1}^k (\mathbf{v} | \mathbf{q}_i) \mathbf{q}_i = (\mathbf{v} | \mathbf{q}_1) \mathbf{q}_1 + (\mathbf{v} | \mathbf{q}_2) \mathbf{q}_2 + \dots + (\mathbf{v} | \mathbf{q}_k) \mathbf{q}_k.$$

Complément orthogonal

- $\text{Ker}(A) = \text{Im}(A^\top)^\perp$ et $\text{Ker}(A^\top) = \text{Im}(A)^\perp$
- $\text{Ker}(A)^\perp = \text{Im}(A^\top)$ et $\text{Im}(A)^\perp = \text{Ker}(A^\top)$
- $(V^\perp)^\perp = V$, $E^\perp = \{0\}$, $\{0\}^\perp = E$
- Si $V \subseteq W$, alors $W^\perp \subseteq V^\perp$ (**attention à l'inversion !**)
- $(V_1 + V_2)^\perp = V_1^\perp \cap V_2^\perp$ (L'orthogonal d'une somme est l'intersection des orthogonaux).

Projection sur un plan — Janvier 2019

$\mathbf{v} = (-2, 3, 2)^\top$, $\Pi = \{\mathbf{x} : x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$, normale $\mathbf{n} = (1, 1, 1)^\top$.

$$\text{proj}_\Pi(\mathbf{v}) = \mathbf{v} - \frac{\mathbf{n}^\top \mathbf{v}}{\mathbf{n}^\top \mathbf{n}} \mathbf{n} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{-2+3+2}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}.$$

Vérification : $(-3) + 2 + 1 = 0$ ✓ (bien dans le plan) et $(-3, 2, 1) \cdot (1, 1, 1) = 0$ n'est pas le bon test ici ; on vérifie que le vecteur projeté est dans Π .

Démonstration théorique — $\text{Ker}(A^\top A) = \text{Ker}(A)$ et $\text{rang}(A^\top A) = \text{rang}(A)$ **Démonstration (Classique des QO) :**

1. Soit $\mathbf{x} \in \text{Ker}(A) \implies A\mathbf{x} = \mathbf{0} \implies A^\top A\mathbf{x} = A^\top \mathbf{0} = \mathbf{0} \implies \mathbf{x} \in \text{Ker}(A^\top A)$. Donc $\text{Ker}(A) \subseteq \text{Ker}(A^\top A)$.
2. Réciproquement, soit $\mathbf{x} \in \text{Ker}(A^\top A) \implies A^\top A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Multiplions à gauche par $\mathbf{x}^\top$:

$$\mathbf{x}^\top A^\top A\mathbf{x} = 0 \implies (A\mathbf{x})^\top (A\mathbf{x}) = 0 \implies \|A\mathbf{x}\|^2 = 0 \implies A\mathbf{x} = \mathbf{0} \implies \mathbf{x} \in \text{Ker}(A).$$

Donc $\text{Ker}(A^\top A) \subseteq \text{Ker}(A)$.

3. **Conclusion** : $\text{Ker}(A^\top A) = \text{Ker}(A)$. Par le théorème du rang sur $A^\top A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, on a $\text{rang}(A^\top A) = n - \dim(\text{Ker}(A^\top A)) = n - \dim(\text{Ker}(A)) = \text{rang}(A)$. ■

10.4 Matrices orthogonales, Isométries et Réflexions

Définition 10.3 (Matrice orthogonale et Isométrie). Une matrice carrée $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est dite **orthogonale** si ses colonnes forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$, c'est-à-dire :

$$Q^\top Q = QQ^\top = I_n \iff Q^{-1} = Q^\top.$$

Une telle matrice représente une **isométrie vectorielle** (transformation conservant les distances et les angles).

Propriétés clés des matrices orthogonales

- **Conservation du produit scalaire et des normes** : $(Q\mathbf{x} \mid Q\mathbf{y}) = \mathbf{x}^\top Q^\top Q \mathbf{y} = \mathbf{x}^\top \mathbf{y} = (\mathbf{x} \mid \mathbf{y})$, d'où $\|Q\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|$.
- **Déterminant** : $\det(Q^\top Q) = \det(Q)^2 = \det(I) = 1 \implies \det(Q) = \pm 1$.
 - Si $\det(Q) = +1$: Q est une **rotation** (isométrie directe).
 - Si $\det(Q) = -1$: Q est une **réflexion** / **symétrie** (isométrie indirecte).
- **Valeurs propres** : Les valeurs propres complexes de Q ont toutes un module égal à 1 ($|\lambda| = 1$).
- Le produit de deux matrices orthogonales est une matrice orthogonale.

Matrices de Réflexion (Householder)

La matrice de la **réflexion orthogonale** par rapport à un hyperplan $\Pi = \{\mathbf{x} : \mathbf{n}^\top \mathbf{x} = 0\}$ de vecteur normal $\mathbf{n} \neq \mathbf{0}$ s'écrit :

$$R = I - 2 \frac{\mathbf{n}\mathbf{n}^\top}{\mathbf{n}^\top \mathbf{n}}.$$

Propriétés caractéristiques :

1. **Symétrique et Orthogonale** : $R^\top = R$ et $R^2 = I$ ($R = R^{-1}$).
2. **Déterminant** : $\det(R) = -1$.
3. **Valeurs propres** : $\lambda = 1$ de multiplicité $n - 1$ (vecteurs propres dans le plan Π) et $\lambda = -1$ de multiplicité 1 (vecteur propre selon la normale $\mathbf{n}$).

10.5 Produits scalaires non standard

Produit scalaire $\text{tr}(A^\top B)$ sur $\mathbb{R}^{n \times n}$

La forme $(A \mid B) = \text{tr}(A^\top B)$ est un produit scalaire sur l'espace des matrices $\mathbb{R}^{n \times n}$:

- **Bilinéaire** : par les propriétés de la trace et de la transposée.
- **Symétrique** : $\text{tr}(A^\top B) = \text{tr}(B^\top A)$ car $\text{tr}(M) = \text{tr}(M^\top)$.
- **Définie positive** : $(A \mid A) = \text{tr}(A^\top A) = \sum_{i,j} A_{ij}^2 > 0$ si $A \neq 0$.

Projection orthogonale de matrices sur un sous-espace

Soit $E \subseteq \mathbb{R}^{n \times n}$ un sous-espace vectoriel muni d'une base orthonormée $(\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_k)$ pour le produit scalaire $(\mathbf{A} \mid \mathbf{B}) = \text{tr}(\mathbf{A}^\top \mathbf{B})$.

La **projection orthogonale** d'une matrice quelconque $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sur le sous-espace E est donnée par la formule de projection :

$$P_E(\mathbf{M}) = \sum_{i=1}^k (\mathbf{M} | \mathbf{q}_i) \mathbf{q}_i = (\mathbf{M} | \mathbf{q}_1) \mathbf{q}_1 + (\mathbf{M} | \mathbf{q}_2) \mathbf{q}_2 + \cdots + (\mathbf{M} | \mathbf{q}_k) \mathbf{q}_k.$$

Si la base $(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k)$ est orthogonale mais pas encore normée, on a de manière équivalente :

$$P_E(\mathbf{M}) = \sum_{i=1}^k \frac{(\mathbf{M} | \mathbf{a}_i)}{\|\mathbf{a}_i\|^2} \mathbf{a}_i.$$

Propriété clé (Minimisation de distance) : $P_E(\mathbf{M})$ est l'unique matrice de E qui minimise la distance de Frobenius à $\mathbf{M}$:

$$P_E(\mathbf{M}) = \underset{\mathbf{N} \in E}{\operatorname{argmin}} \|\mathbf{M} - \mathbf{N}\|^2 = \underset{\mathbf{N} \in E}{\operatorname{argmin}} \operatorname{tr}((\mathbf{M} - \mathbf{N})^\top (\mathbf{M} - \mathbf{N})).$$

Projection orthogonale d'une matrice 3×3 sur les matrices circulantes — Juin 2022

Soit $E \subset \mathbb{R}^{3 \times 3}$ le sous-espace des matrices circulantes réelles, de la forme :

$$C = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}, \quad a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Une base orthogonale de E pour le produit scalaire $(\mathbf{A} | \mathbf{B}) = \operatorname{tr}(\mathbf{A}^\top \mathbf{B})$ est donnée par :

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a $\|\mathbf{e}_1\|^2 = \|\mathbf{e}_2\|^2 = \|\mathbf{e}_3\|^2 = \operatorname{tr}(I_3) = 3$. La base **orthonormée** $(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3)$ est obtenue en divisant par $\|\mathbf{e}_i\| = \sqrt{3}$:

$$\mathbf{q}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{q}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{q}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Formule générale pour une matrice $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$:

$$P_E(\mathbf{M}) = (\mathbf{M} | \mathbf{q}_1) \mathbf{q}_1 + (\mathbf{M} | \mathbf{q}_2) \mathbf{q}_2 + (\mathbf{M} | \mathbf{q}_3) \mathbf{q}_3.$$

Calcul de chaque composante :

$$\begin{aligned} \text{— } (\mathbf{M} | \mathbf{q}_1) &= \operatorname{tr}(\mathbf{M}^\top \mathbf{q}_1) = \frac{a+e+i}{\sqrt{3}} \implies (\mathbf{M} | \mathbf{q}_1) \mathbf{q}_1 = \frac{a+e+i}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \\ \text{— } (\mathbf{M} | \mathbf{q}_2) &= \operatorname{tr}(\mathbf{M}^\top \mathbf{q}_2) = \frac{b+f+g}{\sqrt{3}} \implies (\mathbf{M} | \mathbf{q}_2) \mathbf{q}_2 = \frac{b+f+g}{3} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \\ \text{— } (\mathbf{M} | \mathbf{q}_3) &= \operatorname{tr}(\mathbf{M}^\top \mathbf{q}_3) = \frac{c+d+h}{\sqrt{3}} \implies (\mathbf{M} | \mathbf{q}_3) \mathbf{q}_3 = \frac{c+d+h}{3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

En sommant ces termes, on obtient l'expression explicite :

$$P_E(\mathbf{M}) = \begin{pmatrix} \frac{a+e+i}{3} & \frac{b+f+g}{3} & \frac{c+d+h}{3} \\ \frac{c+d+h}{3} & \frac{a+e+i}{3} & \frac{b+f+g}{3} \\ \frac{b+f+g}{3} & \frac{c+d+h}{3} & \frac{a+e+i}{3} \end{pmatrix}.$$

Intuition remarquable : La projection orthogonale remplace chaque groupe d'éléments contraints d'être égaux par leur **moyenne arithmétique** !

2. Exemple numérique : Calculer la projection de $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 3 \\ -3 & 1 & 6 \\ -6 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ sur E :

- Diagonale ($a = 1, e = 1, i = 1$) : $\frac{1+1+1}{3} = 1$.
- Premier décalage ($b = 6, f = 6, g = -6$) : $\frac{6+6-6}{3} = 2$.
- Deuxième décalage ($c = 3, d = -3, h = -3$) : $\frac{3-3-3}{3} = -1$.

$$P_E(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in E.$$

Produit scalaire par évaluation

Sur $\mathbb{R}_n[x]$, la forme $(p | q) = \sum_{i=1}^k p(x_i) q(x_i)$ est un produit scalaire si les x_i sont **distincts** et si $k \geq n + 1$ (au moins $n + 1$ points d'évaluation pour des polynômes de degré $\leq n$).

Définie positive : $(p | p) = \sum p(x_i)^2 = 0 \iff p(x_i) = 0 \forall i$. Comme p a degré $\leq n$ et s'annule en $k \geq n + 1$ points, $p = 0$.

Produit scalaire par dérivées et polynôme de Taylor

Sur $V = \mathbb{R}_n[x]$, la forme $(f | g) = f(a)g(a) + f'(a)g'(a) + \dots + f^{(n)}(a)g^{(n)}(a)$ est un produit scalaire.

La base orthonormée obtenue par Gram-Schmidt à partir de $(1, x, x^2, \dots)$ est :

$$w_k = \frac{(x - a)^k}{k!}.$$

La projection $P_V(f) = \sum_{k=0}^n (f | w_k) w_k = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k$ est le **polynôme de Taylor** de f en a .

Distance pondérée

La distance induite par $(x | y) = x^\top M y$ (avec M sym. déf. pos.) est :

$$d_M(x, y) = \sqrt{(x - y)^\top M (x - y)}.$$

Pour pondérer certaines composantes (ex. la première vaut 2 fois les autres) : choisir $M = \text{diag}(4, 1, 1)$.

10.6 Projection et optimisation

Projection orthogonale = minimisation de distance

Pour tout sous-espace V de E et tout $f \in E$:

$$P_V(f) = \operatorname{argmin}_{p \in V} \|f - p\|^2 = \operatorname{argmin}_{p \in V} (f - p \mid f - p).$$

La projection est le **meilleur approximant** de f dans V pour la norme induite par le produit scalaire.

Conséquence : le critère minimisé dépend du produit scalaire choisi :

- P.S. par évaluation : minimise $\sum (f(x_i) - p(x_i))^2 \Rightarrow$ **moindres carrés**.
- P.S. par dérivées : minimise $(f(a) - p(a))^2 + (f'(a) - p'(a))^2 + \dots \Rightarrow$ **Taylor**.

Démonstration théorique — La projection $P_E(\mathbf{M})$ minimise la distance (Juin 2022)

Énoncé formel du théorème : Soit $(V, (\cdot \mid \cdot))$ un espace préhilbertien muni d'un produit scalaire et d'une norme induite $\|\cdot\|$ (par exemple $\mathbb{R}^{n \times n}$ avec $(A \mid B) = \operatorname{tr}(A^\top B)$), et soit $E \subseteq V$ un sous-espace vectoriel de V . Pour tout $\mathbf{M} \in V$, la projection orthogonale $P_E(\mathbf{M})$ est l'**unique élément** de E qui minimise la distance à $\mathbf{M}$:

$$\forall \mathbf{N} \in E, \mathbf{N} \neq P_E(\mathbf{M}) \implies \|\mathbf{M} - P_E(\mathbf{M})\| < \|\mathbf{M} - \mathbf{N}\|.$$

Autrement dit : $P_E(\mathbf{M}) = \operatorname{argmin}_{\mathbf{N} \in E} \|\mathbf{M} - \mathbf{N}\| = \operatorname{argmin}_{\mathbf{N} \in E} \operatorname{dist}(\mathbf{M}, \mathbf{N})$.

Démonstration simplifiée et rigoureuse (Théorème de Pythagore) :

1. Soit $\mathbf{N} \in E$ une matrice (ou un vecteur) quelconque de E , avec $\mathbf{N} \neq P_E(\mathbf{M})$.
2. **Décomposition de l'écart (l'astuce clé)** : On insère $P_E(\mathbf{M})$ dans la différence $\mathbf{M} - \mathbf{N}$:

$$\mathbf{M} - \mathbf{N} = \underbrace{(\mathbf{M} - P_E(\mathbf{M}))}_{\text{erreur orthogonale} \in E^\perp} + \underbrace{(P_E(\mathbf{M}) - \mathbf{N})}_{\text{différence dans } E}.$$

3. **Orthogonalité (le produit croisé est nul)** :

- Par définition de la projection orthogonale, le vecteur d'erreur $\mathbf{M} - P_E(\mathbf{M})$ est orthogonal à **tout** élément de E (il appartient à $E^\perp$).
- Or, $P_E(\mathbf{M}) \in E$ et $\mathbf{N} \in E \implies (P_E(\mathbf{M}) - \mathbf{N}) \in E$.
- On a donc rigoureusement : $(\mathbf{M} - P_E(\mathbf{M}) \mid P_E(\mathbf{M}) - \mathbf{N}) = 0$.

4. **Calcul de la distance au carré (Pythagore)** : En développant la norme au carré via le produit scalaire :

$$\begin{aligned} (\operatorname{dist}(\mathbf{M}, \mathbf{N}))^2 &= \|\mathbf{M} - \mathbf{N}\|^2 = (\mathbf{M} - \mathbf{N} \mid \mathbf{M} - \mathbf{N}) \\ &= \|(\mathbf{M} - P_E(\mathbf{M})) + (P_E(\mathbf{M}) - \mathbf{N})\|^2 \\ &= \|\mathbf{M} - P_E(\mathbf{M})\|^2 + 2 \underbrace{(\mathbf{M} - P_E(\mathbf{M}) \mid P_E(\mathbf{M}) - \mathbf{N})}_{=0} \\ &\quad + \|P_E(\mathbf{M}) - \mathbf{N}\|^2 \\ &= \|\mathbf{M} - P_E(\mathbf{M})\|^2 + \|P_E(\mathbf{M}) - \mathbf{N}\|^2. \end{aligned}$$

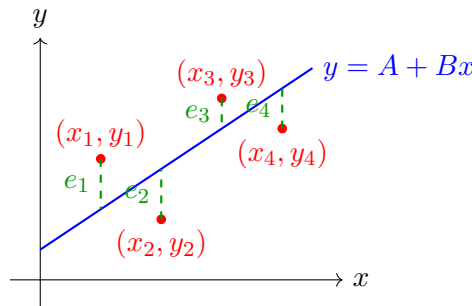
5. **Conclusion stricte** : Comme $\mathbf{N} \neq P_E(\mathbf{M})$, la différence $P_E(\mathbf{M}) - \mathbf{N} \neq \mathbf{0}$. Par le caractère défini positif de la norme, on a $\|P_E(\mathbf{M}) - \mathbf{N}\|^2 > 0$. Par conséquent :

$$\|\mathbf{M} - \mathbf{N}\|^2 > \|\mathbf{M} - P_E(\mathbf{M})\|^2 \implies \operatorname{dist}(\mathbf{M}, \mathbf{N}) > \operatorname{dist}(\mathbf{M}, P_E(\mathbf{M})). \quad \blacksquare$$

11 Moindres carrés (régression linéaire)

11.1 Principe

On cherche les paramètres d'un modèle linéaire $y = A + Bx$ (ou $y = p + mx$) qui minimisent l'erreur quadratique entre les données et le modèle.



Procédure de résolution

1. **Construire la matrice M et le vecteur $\mathbf{b}$:**

$$M = \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_k \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_k \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}.$$

Attention : la colonne de 1 est à **gauche** (constante A), la colonne de x_i à droite.

2. **Calculer les équations normales :**

$$M^T M \hat{\mathbf{x}} = M^T \mathbf{b}.$$

3. **Résoudre** le système 2×2 (par substitution, Cramer, etc.).
4. **Prédire** : évaluer $y(x_0) = A + Bx_0$ pour la valeur demandée.

Formule rapide pour $M^T M$ et $M^T \mathbf{b}$

Si $M = \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_k \end{pmatrix}$, alors :

$$M^T M = \begin{pmatrix} k & \sum x_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 \end{pmatrix}, \quad M^T \mathbf{b} = \begin{pmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i y_i \end{pmatrix}.$$

Exemple résolu — Juin 2024

Données : heures d'étude $\rightarrow$ points obtenus.

h	1	2	3
p	38	50	68

Modèle $p(h) = A + Bh$.

$$M^T M = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 14 \end{pmatrix}, \quad M^T \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 156 \\ 342 \end{pmatrix}.$$

Résolution : $A = 22$, $B = 15$. Prédiction pour $h = 4$: $p(4) = 22 + 15 \times 4 = \boxed{82}$.

Modèles non standard

Parfois le modèle n'est pas $y = A + Bx$ mais $y = C + D \cdot 2^x$ ou similaire. La construction de M s'adapte :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2^{x_1} \\ 1 & 2^{x_2} \\ \vdots & \vdots \end{pmatrix}.$$

La procédure reste identique (équations normales).

11.2 Régression quadratique

Moindres carrés quadratiques

Pour un modèle $\hat{y}(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, la matrice M devient :

$$M = \begin{pmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_k^2 & x_k & 1 \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{p}} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}.$$

On résout les mêmes **équations normales** : $M^\top M \hat{\mathbf{p}} = M^\top \mathbf{b}$.

Vérification d'un modèle candidat : pour vérifier que $\hat{\mathbf{p}}$ est bien la solution, il suffit de substituer dans $M^\top M \hat{\mathbf{p}} = M^\top \mathbf{b}$ et vérifier l'égalité.

Régression quadratique — Janvier 2026

Données : températures lors d'une éclipse.

x	0	1	2	3
y	24	22	19	17

Modèle $\hat{y}(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$. On calcule :

$$M^\top M = \begin{pmatrix} 98 & 36 & 14 \\ 36 & 14 & 6 \\ 14 & 6 & 4 \end{pmatrix}, \quad M^\top \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 251 \\ 111 \\ 82 \end{pmatrix}.$$

La solution $\hat{\mathbf{p}} = (0, -2,4, 24,1)^\top$ satisfait les équations normales. Le modèle optimal est $\hat{y}(x) = -2,4x + 24,1$ (le coefficient $\alpha = 0$ indique qu'un modèle linéaire suffit).

12 Équations différentielles, systèmes et récurrences

12.1 EDO linéaires à coefficients constants

Résolution d'une EDO d'ordre n

1. **Équation homogène** $a_n y^{(n)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0$:
 - Écrire le **polynôme caractéristique** : $a_n r^n + \dots + a_1 r + a_0 = 0$.
 - Trouver les racines $r_1, r_2, \dots$.
2. **Solution homogène** :
 - Racine simple réelle r : terme Ce^{rt} .
 - Racine réelle de multiplicité k : termes $C_1 e^{rt} + C_2 t e^{rt} + \dots + C_k t^{k-1} e^{rt}$.
 - Racines complexes conjuguées $\alpha \pm i\beta$: termes $e^{\alpha t}(C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t)$.
3. **Solution particulière** (si second membre non nul) :
 - Second membre polynomial $\rightarrow$ essayer un polynôme de même degré.
 - Second membre e^{at} $\rightarrow$ essayer Ce^{at} (ou Cte^{at} si a est racine).
 - Second membre constant c $\rightarrow$ essayer $y_p = \text{constante}$ (attention si 0 est racine : essayer $y_p = ct$).
4. **Solution générale** $= y_h + y_p$.
5. **Conditions initiales** : résoudre pour les constantes.

Exemple résolu — Janvier 2019

$y''' - 2y'' + y' = 0$, avec $y(0) = y'(0) = 1$, $y''(0) = 2$.
 Polynôme caractéristique : $r^3 - 2r^2 + r = r(r-1)^2 = 0$.
 Racines : $r = 0$ (simple), $r = 1$ (double).
 Solution générale : $y(t) = c + ae^t + bte^t$.
 Conditions initiales :

$$\begin{aligned} y(0) &= c + a = 1 \\ y'(0) &= a + b = 1 \\ y''(0) &= a + 2b = 2 \end{aligned}$$

D'où $b = 1$, $a = 0$, $c = 1$. Solution : $y(t) = 1 + te^t$.
 $y(\ln 2) = 1 + \ln(2) \cdot 2 = \boxed{1 + 2 \ln 2}$.

EDO avec second membre — Août 2019

$y'' - 4y' + 4y = 4t$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 3$.
 Polynôme caractéristique : $(r-2)^2 = 0$, racine $r = 2$ double.
 $y_h(t) = ae^{2t} + bte^{2t}$.
 Solution particulière : essayer $y_p = ct + d$. En insérant : $0 - 4c + 4(ct + d) = 4t$, soit $4ct + (4d - 4c) = 4t$. D'où $c = 1$, $d = 1$.
 $y(t) = ae^{2t} + bte^{2t} + t + 1$.
 CI : $y(0) = a + 1 = 2 \Rightarrow a = 1$. $y'(0) = 2a + b + 1 = 3 \Rightarrow b = 0$.
 $y(1) = e^2 + 1 + 1 = \boxed{e^2 + 2}$.

12.2 Systèmes d'EDO linéaires

Résolution de $\mathbf{u}'(t) = A\mathbf{u}(t)$

1. Calculer les **valeurs propres** de A (trace et déterminant pour 2×2).
2. Trouver les **vecteurs propres** associés.
3. **Diagonaliser** : $A = X\Lambda X^{-1}$.
4. La solution est :

$$\mathbf{u}(t) = X e^{\Lambda t} X^{-1} \mathbf{u}(0),$$

$$\text{où } e^{\Lambda t} = \text{diag}(e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}).$$

5. Développer le produit matriciel pour obtenir $x(t)$ et $y(t)$.

Astuce d'examen : si les réponses proposent des solutions, vérifier directement les **conditions initiales** $\mathbf{u}(0)$ pour éliminer les mauvaises réponses.

Astuce pour 2×2 : $\lambda_1 + \lambda_2 = \text{tr}(A)$, $\lambda_1 \lambda_2 = \det(A)$.

Système d'EDO — Juin 2024

$$\begin{cases} x' = 5x - 3y \\ y' = 6x - 4y \end{cases}, \quad x(0) = 1, y(0) = 3.$$

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}. \quad \text{tr}(A) = 1, \det(A) = -2.$$

$$\text{VP : } \lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 2.$$

$$\text{Vecteurs propres : } v_1 = (1, 2)^\top, v_2 = (1, 1)^\top.$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, X^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{u}(t) = X e^{\Lambda t} X^{-1} \mathbf{u}(0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$X^{-1} \mathbf{u}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{u}(t) = \begin{pmatrix} 2e^{-t} - e^{2t} \\ 4e^{-t} - e^{2t} \end{pmatrix}.$$

$$y(1) - x(1) = (4e^{-1} - e^2) - (2e^{-1} - e^2) = 2e^{-1} = \boxed{\frac{2}{e}}.$$

12.3 Équations de récurrence linéaires

Résolution de $x_{n+2} + ax_{n+1} + bx_n = f(n)$

1. **Équation homogène** $x_{n+2} + ax_{n+1} + bx_n = 0$:

— Écrire le **polynôme caractéristique** : $r^2 + ar + b = 0$.

— Trouver les racines r_1, r_2 .

— Solution homogène $x_n^{(h)}$:

— $r_1 \neq r_2$: $x_n^{(h)} = Ar_1^n + Br_2^n$.

— $r_1 = r_2 = r$: $x_n^{(h)} = (A + Bn)r^n$.

— Racines complexes $r = \rho e^{\pm i\theta}$: $x_n^{(h)} = \rho^n (A \cos(n\theta) + B \sin(n\theta))$.

2. **Solution particulière** $x_n^{(p)}$ (si $f(n) \neq 0$) :

- Si $f(n) = P(n)$ (polynôme de degré k) : essayer $x_n^{(p)} = Q(n)$ polynôme de même degré. (Si 1 est racine de multiplicité m , essayer $n^m Q(n)$).
- Si $f(n) = C \cdot \alpha^n$: essayer $x_n^{(p)} = D \cdot \alpha^n$. (Si α est racine de multiplicité m , essayer $D \cdot n^m \alpha^n$).
- Remplacer $x_n^{(p)}$ dans l'équation complète pour identifier les constantes (ex : D).

3. **Solution générale** : $x_n = x_n^{(h)} + x_n^{(p)}$.

4. **Conditions initiales** : appliquer pour trouver A, B (toujours **après** avoir ajouté $x_n^{(p)}$!).

Conditions initiales

L'erreur classique est d'utiliser les conditions initiales pour trouver les constantes de la solution homogène **avant** d'y ajouter la solution particulière. Les conditions initiales s'appliquent toujours sur la solution **générale complète** : $x_n = x_n^{(h)} + x_n^{(p)}$.

Récurrence non homogène avec solution particulière

Soit l'équation de récurrence non homogène avec conditions initiales :

$$x_{n+2} - 5x_{n+1} + 6x_n = 2 \cdot 4^n, \quad \text{avec } x_0 = 3 \text{ et } x_1 = 7.$$

1. **Solution homogène** ($x_{n+2} - 5x_{n+1} + 6x_n = 0$) :

- Polynôme caractéristique : $r^2 - 5r + 6 = (r - 2)(r - 3) = 0 \implies r_1 = 2, r_2 = 3$.
- Solution homogène : $x_n^{(h)} = A \cdot 2^n + B \cdot 3^n$.

2. **Recherche de la solution particulière** ($x_n^{(p)}$) :

- Le second membre est $f(n) = 2 \cdot 4^n$. Comme 4 n'est pas racine du polynôme caractéristique ($4 \neq 2$ et $4 \neq 3$), on pose :

$$x_n^{(p)} = C \cdot 4^n.$$

- On injecte $x_n^{(p)}$ dans l'équation complète :

$$C \cdot 4^{n+2} - 5(C \cdot 4^{n+1}) + 6(C \cdot 4^n) = 2 \cdot 4^n.$$

- En simplifiant par 4^n :

$$C(16 - 20 + 6) = 2 \iff 2C = 2 \implies C = 1.$$

- On a donc : $x_n^{(p)} = 4^n$.

3. **Solution générale complète** :

$$x_n = x_n^{(h)} + x_n^{(p)} = A \cdot 2^n + B \cdot 3^n + 4^n.$$

4. **Application des conditions initiales** ($x_0 = 3, x_1 = 7$) :

- Pour $n = 0$: $x_0 = A \cdot 2^0 + B \cdot 3^0 + 4^0 = A + B + 1 = 3 \implies A + B = 2$.
- Pour $n = 1$: $x_1 = A \cdot 2^1 + B \cdot 3^1 + 4^1 = 2A + 3B + 4 = 7 \implies 2A + 3B = 3$.

En résolvant le système (ex. $L_2 - 2L_1$) : $B = 3 - 2(2) = -1$, puis $A = 2 - B = 3$.

5. **Solution finale** :

$$x_n = 3 \cdot 2^n - 3^n + 4^n.$$

Récurrence — récurrent

$x_{n+1} = 2x_n + 3x_{n-1}$, $y_6 = 3^7$ et $y_7 = 3^6$.

Polynôme caractéristique : $r^2 - 2r - 3 = (r+1)(r-3) = 0$. Racines : $r_1 = -1$, $r_2 = 3$.

Solution : $y_n = A(-1)^n + B \cdot 3^n$.

Système :
$$\begin{cases} A + 3^6 B = 3^7 \\ -A + 3^7 B = 3^6 \end{cases}$$

En additionnant : $(3^6 + 3^7)B = 3^7 + 3^6 \Rightarrow B = 1$. Puis $A = 3^7 - 3^6 = 1458$.

$y_0 = A + B = \boxed{1459}$.

Récurrence avec racines complexes

$x_{n+2} - 2x_{n+1} + 2x_n = 0$, avec $x_0 = 1$ et $x_1 = 2$.

Polynôme caractéristique : $r^2 - 2r + 2 = 0$. $\Delta = 4 - 8 = -4$.

Racines : $r_{1,2} = \frac{2 \pm 2i}{2} = 1 \pm i$.

Forme polaire : $\rho = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$, et $\theta = \arctan(1/1) = \pi/4$.

Solution homogène : $x_n = (\sqrt{2})^n (A \cos(n\frac{\pi}{4}) + B \sin(n\frac{\pi}{4}))$.

Conditions initiales :

— $n = 0$: $x_0 = (\sqrt{2})^0 (A \cdot 1 + B \cdot 0) = A = 1$.

— $n = 1$: $x_1 = \sqrt{2} \left(1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + B \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 1 + B = 2 \Rightarrow B = 1$.

Solution générale :
$$x_n = (\sqrt{2})^n \left(\cos\left(n\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(n\frac{\pi}{4}\right) \right).$$

Récurrence avec CI non consécutives — Janvier 2026

Soit $f[n+2] = -f[n+1] + 2f[n]$ avec $f[0] = 5$ et $f[2] = 8$. Trouver $f[10]$.

1. **Polynôme caractéristique** : $r^2 + r - 2 = (r+2)(r-1) = 0 \Rightarrow r_1 = -2, r_2 = 1$.

2. **Solution générale** : $f[n] = A(-2)^n + B(1)^n$.

3. **Conditions initiales** ($f[0]$ et $f[2]$) :

$$\begin{cases} f[0] = A(-2)^0 + B(1)^0 = A + B = 5 \\ f[2] = A(-2)^2 + B(1)^2 = 4A + B = 8 \end{cases}$$

Soustraction ($L_2 - L_1$) : $3A = 3 \Rightarrow A = 1$, puis $B = 4$.

4. **Calcul** : $f[10] = 1 \cdot (-2)^{10} + 4 \cdot 1^{10} = 1024 + 4 = \boxed{1028}$.

12.4 Récurrences d'ordre supérieur**Récurrence d'ordre 3**

$x_{n+3} + ax_{n+2} + bx_{n+1} + cx_n = 0$. Polynôme caractéristique : $r^3 + ar^2 + br + c = 0$.

Si les racines sont r_1, r_2, r_3 distinctes : $x_n = c_1 r_1^n + c_2 r_2^n + c_3 r_3^n$.

Si r_1 est racine double : $x_n = (c_1 + c_2 n) r_1^n + c_3 r_3^n$.

Matrice compagnon

L'équation $x_{n+k} = a_{k-1}x_{n+k-1} + \dots + a_0x_n$ se réécrit $y_{n+1} = Ay_n$ avec :

$$y_n = \begin{pmatrix} x_n \\ x_{n+1} \\ \vdots \\ x_{n+k-1} \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{k-1} \end{pmatrix}.$$

La matrice compagnon est diag. $\iff$ ses vp sont toutes distinctes (car $m_g = 1$ pour toute vp).

Réurrence d'ordre 3 avec solution particulière — Janvier 2019

$$x_{n+1} = 4x_n - 5x_{n-1} + 2x_{n-2} + 3^n.$$

Polynôme caract. de la partie homogène : $r^3 - 4r^2 + 5r - 2 = (r-1)^2(r-2) = 0$. Racines : 1, 1, 2.

Solution homogène : $x_n^{(h)} = (A + Bn) \cdot 1^n + C \cdot 2^n = A + Bn + C \cdot 2^n$.

Solution particulière : Le terme indépendant est 3^n . Comme 3 n'est pas racine du polynôme caractéristique, on essaye $x_n^{(p)} = d \cdot 3^n$. On remplace dans l'équation de départ :

$$d \cdot 3^{n+1} = 4d \cdot 3^n - 5d \cdot 3^{n-1} + 2d \cdot 3^{n-2} + 3^n$$

On divise tout par 3^{n-2} :

$$27d = 36d - 15d + 2d + 9 \iff 27d = 23d + 9 \iff 4d = 9 \implies d = 9/4.$$

Solution générale : $x_n = A + Bn + C \cdot 2^n + \frac{9}{4} \cdot 3^n$.

12.5 EDO avec racines complexes**Solution réelle avec racines complexes**

Pour $my'' + \gamma y' + ky = f(t)$ avec $\Delta = \gamma^2 - 4mk < 0$:

Racines : $\lambda_{1,2} = -\frac{\gamma}{2m} \pm i\omega$ avec $\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{\gamma^2}{4m^2}}$.

Solution réelle : $y(t) = e^{-\frac{\gamma}{2m}t} (A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)) + y_p(t)$.

Interprétation physique (masse-ressort) : oscillations amorties. Le frottement (γ) :

- Diminue la fréquence d'oscillation ($\omega < \omega_0 = \sqrt{k/m}$).
- Provoque un amortissement exponentiel de l'amplitude.
- Position asymptotique : $y(\infty) = mg/k$ (indépendant des conditions initiales).

12.6 Systèmes non diagonalisables — triangularisation**Résolution via $A = T^{-1}XT$ avec T triangulaire**

Quand A n'est pas diagonalisable :

1. Trouver X inversible telle que $T = X^{-1}AX$ est triangulaire supérieure (colonnes de X : vecteurs propres + vecteurs complémentaires).
2. Poser $v = X^{-1}u$. Le système $u' = Au$ devient $v' = Tv$.
3. Résoudre $v' = Tv$ par substitution arrière (la dernière composante d'abord).

4. Revenir : $u = Xv$.

Système avec triangularisation — Janvier 2021

A a vp $\lambda_1 = -6$ et $\lambda_2 = 4$ (double, $m_g = 1$). On pose $X = [v_1, v_2, v_3]$ et :

$$T = X^{-1}AX = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

On résout : $v'_3 = 4v_3 \Rightarrow v_3 = c_3 e^{4t}$, puis $v'_2 = 4v_2 + 2v_3$ (EDO non homogène, sol. part. : $2c_3 t e^{4t}$), puis $v'_1 = -6v_1$.

12.7 EDO à coefficients non constants via opérateurs

Résolution par valeurs propres de l'opérateur

Si un opérateur linéaire $L : \mathbb{R}_n[x] \rightarrow \mathbb{R}_n[x]$ est défini (ex. $L(p) = p'' + 2xp'$), alors l'EDO $L(y) = \lambda y$ admet des solutions polynomiales ssi λ est une **valeur propre** de la matrice de L dans la base canonique.

Les solutions sont les vecteurs propres associés, exprimés dans la base de polynômes.

12.8 Exponentielle matricielle

Définition et propriétés de e^A

L'exponentielle matricielle de $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est définie par la série :

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = I + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \dots$$

Cas particuliers :

- **Matrice diagonalisable** : si $A = PDP^{-1}$, alors $e^A = P e^D P^{-1}$, où $e^D = \text{diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n})$.
- **Matrice nilpotente** : si $A^m = 0$, la série se termine : $e^A = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{A^k}{k!}$. En particulier, si $A^2 = 0$: $e^A = I + A$.

Propriétés clés :

- $\det(e^A) = e^{\text{tr}(A)}$ (car les vp de e^A sont e^{λ_i} et $\prod e^{\lambda_i} = e^{\sum \lambda_i} = e^{\text{tr}(A)}$).
- $e^{A+B} = e^A e^B$ **seulement** si $AB = BA$ (attention, **faux** en général!).
- $(e^A)^{-1} = e^{-A}$.
- **Lien avec les EDO** : la solution de $\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t)$ est $\mathbf{x}(t) = e^{At}\mathbf{x}(0)$.

12.9 Gradient et systèmes dynamiques

Système $\mathbf{x}'(t) = -A^\top A \mathbf{x}(t)$

Soit $E(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \|A\mathbf{x}\|^2 = \frac{1}{2} \mathbf{x}^\top A^\top A \mathbf{x}$ une fonction énergie. Le système dynamique par **descente de gradient** :

$$\mathbf{x}'(t) = -\nabla E(\mathbf{x}(t)) = -A^\top A \mathbf{x}(t)$$

États d'équilibre : $\mathbf{x}^* \in N(A^\top A) = N(A)$ (d'après le résultat $\text{Ker}(A^\top A) = \text{Ker}(A)$).

Résolution : on décompose $\mathbf{x}_0$ sur les vecteurs propres de $A^\top A$. Si $A^\top A \mathbf{v}_i = \mu_i \mathbf{v}_i$, alors $-A^\top A$ a les vp $-\mu_i$ et :

$$\mathbf{x}(t) = \sum_i c_i e^{-\mu_i t} \mathbf{v}_i.$$

Les composantes avec $\mu_i > 0$ **décroissent** exponentiellement vers 0. Les composantes avec $\mu_i = 0$ (dans $N(A)$) **restent constantes**.

Descente de gradient — Juin 2026

Soit $\mathbf{v} = (0, 1, 2, -2)^\top$ un vecteur propre de $A^\top A$ pour $\mu = 6$, et $\mathbf{w} = (0, 2, -1, 0)^\top \in N(A)$ (vp $\mu = 0$).

Avec $\mathbf{x}_0 = \mathbf{v} + \mathbf{w} = (0, 3, 1, -2)^\top$:

$$\mathbf{x}(t) = e^{-6t} \mathbf{v} + \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-6t} + 2 \\ 2e^{-6t} - 1 \\ -2e^{-6t} \end{pmatrix}.$$

À long terme : $\mathbf{x}(\infty) = \mathbf{w} = (0, 2, -1, 0)^\top$ (l'état d'équilibre dans $N(A)$).

Modélisation par matrice de transition paramétrique

Pour traduire un problème textuel de migration/transition en un système $\mathbf{x}_{n+1} = A\mathbf{x}_n$:

1. Identifier les **états** (les composantes de $\mathbf{x}$).
2. Pour chaque état, écrire la fraction qui **reste** et les fractions qui **arrivent/partent**.
3. Chaque colonne j de A contient les fractions envoyées par l'état j vers tous les états.
4. Vérifier : si la population totale est conservée, la somme de chaque colonne vaut 1 (matrice stochastique par colonnes) ou la somme de chaque ligne vaut 1 (stochastique par lignes).

13 Changement de base et rotations

13.1 Matrice de changement de base

Changement de base pour une application linéaire

Si T est un opérateur linéaire sur $\mathbb{R}^n$ avec matrice T_e dans la base canonique e , et B est la matrice de passage vers la base b (colonnes = vecteurs de b) :

$$T_b = B^{-1}T_e B.$$

Changement de base — Janvier 2019

$T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ dans la base canonique. Nouvelle base : $b_1 = (1, 1)^\top$, $b_2 = (1, -1)^\top$.

$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$... Non, $B^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

$T_b = B^{-1}TB$. L'entrée $(1, 2)$ de T_b vaut $\boxed{1/2}$.

13.2 Matrices de rotation

Rotation 2D d'angle θ

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Sens positif = sens trigonométrique (antihoraire).

Rotation 3D autour d'un axe

Pour une rotation d'angle θ autour d'un axe $\mathbf{u}$:

1. Construire une base orthonormée B dont le dernier (ou premier) vecteur est $\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{u}/\|\mathbf{u}\|$.
2. La matrice de rotation dans cette base est :

$$R_B = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{si l'axe est le 3^e vecteur}).$$

3. Revenir à la base canonique : $R = BR_B B^{-1}$.

Valeurs propres d'une rotation

Pour une rotation 3D d'angle $\theta \neq 0$:

- $\lambda_1 = 1$ (vecteur propre = axe de rotation).
- $\lambda_2 = e^{i\theta}$, $\lambda_3 = e^{-i\theta}$ (valeurs propres complexes conjuguées).

Par exemple, pour $\theta = 90^\circ$: $\lambda = 1, i, -i$ — toutes de multiplicité 1, donc la matrice est diagonalisable dans $\mathbb{C}$.

Rotation — Janvier 2023

Matrice $R_x(90^\circ)$ de rotation de 90° autour de l'axe x :

$$R_x(90^\circ) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Polynôme caractéristique : $-\lambda^3 + \lambda^2 - \lambda + 1 = -(\lambda - 1)(\lambda - i)(\lambda + i) = 0$.

Valeurs propres : $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = i$, $\lambda_3 = -i$.

Toutes distinctes $\Rightarrow m_a = m_g = 1$ pour chaque vp $\Rightarrow$ **diagonalisable dans $\mathbb{C}$** .

Astuces pour gagner du temps à l'examen

Calculs de base

— **Inverse d'une 2×2** : Pas besoin de Gauss-Jordan !

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

— **Déterminant triangulaire/diagonal** : Si la matrice a des zéros partout en dessous (ou au-dessus) de la diagonale, le déterminant est le **produit de la diagonale**. Ne calculez rien d'autre !

Valeurs propres à l'œil nu

— **Somme des lignes constante** : Si la somme des éléments de *chaque ligne* vaut la même constante S , alors $\lambda = S$ est une valeur propre, et $\mathbf{v} = (1, 1, \dots, 1)^\top$ est un vecteur propre !

— **Trace et Déterminant** :

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = \text{tr}(A) \quad \text{et} \quad \prod_{i=1}^n \lambda_i = \det(A)$$

Astuce : Si on cherche la 3ème valeur propre et qu'on connaît λ_1 et λ_2 , utilisez $\lambda_3 = \text{tr}(A) - \lambda_1 - \lambda_2$ au lieu du polynôme !

— **Matrices triangulaires/diagonales** : Ne cherchez **jamais** le polynôme caractéristique. Les valeurs propres sont directement les éléments sur la diagonale.

Puissances de matrices $A^k \mathbf{x}$

Si on vous demande de calculer $A^{100} \mathbf{x}$, **ne calculez jamais A^{100}** !

1. Vérifiez si $\mathbf{x}$ est un vecteur propre (est-ce que $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$?). Si oui, alors $A^{100}\mathbf{x} = \lambda^{100}\mathbf{x}$.
2. Si non, décomposez $\mathbf{x}$ comme somme de vecteurs propres : $\mathbf{x} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2$. Alors $A^{100}\mathbf{x} = c_1\lambda_1^{100}\mathbf{v}_1 + c_2\lambda_2^{100}\mathbf{v}_2$.

Projections intelligentes

Pour projeter un vecteur $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ sur un sous-espace V de grande dimension (ex : un plan dans $\mathbb{R}^3$, ou dimension $n - 1$) : Au lieu de faire Gram-Schmidt sur la base de V , **projetez sur le vecteur normal $\mathbf{n}$** ($V^\perp$), et soustrayez !

$$P_V(\mathbf{v}) = \mathbf{v} - P_{V^\perp}(\mathbf{v}) = \mathbf{v} - \frac{\mathbf{n}^\top \mathbf{v}}{\mathbf{n}^\top \mathbf{n}} \mathbf{n}$$

Cette formule évite tout le processus d'orthogonalisation !

Récapitulatif des formules essentielles

Formules à connaître par cœur

Systèmes linéaires

— Solutions $\iff \text{rang}(A) = \text{rang}(A|\mathbf{b})$; unique $\iff \text{rang} = n$.

Espaces vectoriels

— $\dim(V + W) = \dim V + \dim W - \dim(V \cap W)$

— $V \oplus W \iff V \cap W = \{0\}$

Applications linéaires

— $\dim(\text{Ker } L) + \dim(\text{Im } L) = \dim E$

— Injective $\iff \text{Ker } L = \{0\}$; Surjective $\iff \text{Im } L = F$

Déterminants

— $\det(AB) = \det A \cdot \det B$; $\det(\alpha A) = \alpha^n \det A$

— Inversible $\iff \det A \neq 0$

Valeurs propres

— $1 \leq m_g(\lambda) \leq m_a(\lambda)$

— Diagonalisable $\iff \forall i : m_g(\lambda_i) = m_a(\lambda_i)$

— Symétrique $\Rightarrow$ diagonalisable, vp réelles

Formes quadratiques

— $Q_{ij} = \frac{1}{2} \times \text{coeff. de } x_i x_j$ (hors diag.)

— $LDL^\top$: opérations simultanées lignes ET colonnes

Projections

— Sur droite : $P_b(v) = \frac{b^\top v}{b^\top b} b$

— Sur plan : $\text{proj}_\Pi(v) = v - \text{proj}_n(v)$

Moindres carrés

— $M^\top M \hat{x} = M^\top b$

EDO / Systèmes

— $\mathbf{u}(t) = X e^{\Lambda t} X^{-1} \mathbf{u}(0)$

— Récurrence : $x_n = A r_1^n + B r_2^n$

Changement de base

— $T_b = B^{-1} T_e B$