

Synthèse Ultime

LEPL1103 — Mathématique et Physique des milieux continus

UCLouvain — Quadrimestre 3

O. De Baerdemaker

Orientée résolution de problèmes

Avant-propos

Salut à toi, vaillant(e) étudiant(e) en plein blocus de **Mécanique des Milieux Continus** !

Si tu as ce document sous les yeux (peut-être à 2h du matin avec un café tiède la veille de l'examen), voilà le topo : je suis un profil **ultra-visuel**. J'ai un besoin viscéral de clarté, de schémas, de codes couleurs et de structures bien nettes... tout en ayant un esprit, soyons honnêtes, parfois un peu (beaucoup) éparpillé.

Quand je me suis retrouvé face aux variétés, aux tenseurs d'ordre deux, aux métriques induites et au gradient de transformation F , il me fallait absolument un moyen de transformer ce grand puzzle géométrique en quelque chose de limpide, logique et directement actionnable le jour J.

Cette synthèse a donc été construite sur mesure comme une boîte à outils de terrain :

- Des **boîtes thématiques colorées** pour repérer en un clin d'œil les définitions clés, les théorèmes et surtout les **pièges classiques** où l'on perd bêtement des points.
- Des **procédures de résolution pas-à-pas** pour chaque grand type d'exercice d'examen : plus besoin d'hésiter devant sa feuille en se demandant par quel bout attaquer le problème.
- Une priorité donnée à l'**intuition géométrique et visuelle**, parce qu'une notion qu'on arrive à visualiser (variété, espace tangent, déformation) est une notion qu'on réussit à manipuler sans paniquer.

Prends ce qui t'aide, annote, surligne et approprie-toi chaque méthode. Ce cours peut paraître impressionnant au début — entre la notation indicielle d'Einstein, les covecteurs et la décomposition polaire — mais avec de la méthode, du repérage visuel et un entraînement ciblé, il se dompte parfaitement.

Je te souhaite un maximum d'énergie, des révisions productives et surtout : **déchire tout à tes examens !**

O. De Baerdemaker

Table des matières

Avant-propos	2
1 Fondements géométriques : variétés, vecteurs, covecteurs et métrique	4
1.1 Rappels théoriques	4
1.2 Procédures de résolution	10
2 Mesure, tenseurs d'ordre deux et opérateurs différentiels	14
2.1 Rappels théoriques	14
2.2 Procédures de résolution	18
3 Du mouvement à la déformation	26
3.1 Rappels théoriques	26
3.2 Procédures de résolution	32
4 Dynamique, bilans universels et lois de comportement	39
4.1 Rappels théoriques	39
4.2 Procédures de résolution	45
5 Méthodes transversales et réflexes d'examen	51
5.1 Le <i>Traducteur d'énoncé</i> (Dictionnaire d'examen)	51
5.2 Les <i>Red Flags</i> : signes que vous êtes sur la mauvaise piste	52
5.3 Arbre de décision ultime : comment router un problème d'examen ?	54
5.4 Vérifications de bon sens (<i>Sanity Checks</i>)	54
5.5 Formulaire des métriques et éléments de mesure	55

1 Fondements géométriques : variétés, vecteurs, covecteurs et métrique

Ce chapitre pose **tout le vocabulaire géométrique** sur lequel repose le reste du cours. La question fondamentale est : *comment décrire rigoureusement un milieu continu, ses directions, ses longueurs et ses angles, sans dépendre d'un choix de coordonnées particulier ?* Concrètement, c'est ici que tu apprends à distinguer un **point** de ses coordonnées, un **vecteur** d'une colonne de nombres, et la **différentielle** df du **gradient** $\text{grad } f$. La clé de voûte : la **métrique** g , qui permet de mesurer les longueurs et les angles.

1.1 Rappels théoriques

Définition — Description continue et séparation d'échelles (§1.1)

Bien que la matière réelle soit discontinue au niveau atomique (distance interatomique $\sim 10^{-10}$ m), la mécanique des milieux continus modélise fluides et solides comme un continuum sans vide par une **séparation stricte de trois échelles** :

$$\ell_{\text{micro}} \ll \ell_{\text{obs}} \ll L_{\text{macro}}$$

- ℓ_{micro} : échelle microscopique (distance interatomique dans un solide, libre parcours moyen dans un gaz).
- ℓ_{obs} : échelle d'observation ou **Volume Élémentaire Représentatif (VER / RVE)** sur lequel on moyenne les grandeurs physiques pour définir des champs continus locaux (densité ρ , vitesse v , température T).
- L_{macro} : échelle macroscopique caractéristique du système (dimension de la structure ou de l'écoulement).

La démarche déductive universelle du cours :

Champs continus $(x, t) \longrightarrow$ Équations de bilan locales & CL $\longrightarrow$ Solutions analytiques/numériques $\longrightarrow$ Mesures

Définition — Variété de dimension n

Une **variété** $\mathcal{M}$ de dimension n est un espace dont chaque point possède un voisinage que l'on peut décrire à l'aide de n coordonnées réelles. Une **carte de coordonnées** est une application bijective continue

$$\chi : U \subset \mathcal{M} \longrightarrow \chi(U) \subset \mathbb{R}^n, \quad \chi(q) = (x^1(q), \dots, x^n(q)).$$

- Un **atlas** est une famille de cartes dont les domaines recouvrent $\mathcal{M}$.
- Les **changements de coordonnées** $\tilde{x}^j = \tilde{x}^j(x^1, \dots, x^n)$ sont supposés réguliers et inversibles.
- La **dimension intrinsèque** $\neq$ dimension de l'espace ambiant (ex : sphère = dim 2 dans $\mathbb{R}^3$).

L'intuition :

- La Terre est la **variété physique** $\mathcal{M}$ (l'objet réel, indépendant de toute écriture humaine).
- Une carte routière ou un planisphère est une **carte locale** χ qui plaque des coordonnées numériques (x^1, x^2) sur les lieux.
- Deux cartes différentes (ex : projection de Mercator et projection conique) donnent des chiffres différents pour un même lieu, mais la distance physique réelle entre Bruxelles et Louvain-la-Neuve est **invariante**.
- **Le but du cours** : écrire des lois de la physique valables sur le solide ou le fluide lui-même ($\mathcal{M}$), sans dépendre de la grille de repérage choisie par l'ingénieur !

Propriété — Classification des variétés et dimension du bord

Face à un sous-ensemble géométrique défini implicitement ou par paramétrisation, il faut distinguer sa **nature intrinsèque**, son **plongement ambiant** et le **système de coordonnées** employé :

— **Géométrie intrinsèque vs extrinsèque vs plongement (§1.3) :**

- L'**espace ambiant** est l'espace extérieur choisi pour représenter l'objet (souvent $\mathbb{R}^3$).
- Le **plongement** $\iota : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^3$ indique comment chaque point de la variété est disposé dans l'espace ambiant.
- **Point de vue extrinsèque** : décrit l'objet par des équations cartésiennes dans l'espace ambiant (ex : $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ pour la sphère), en observant comment il se plie depuis l'extérieur.
- **Point de vue intrinsèque** : décrit l'objet par des coordonnées internes (ex : angles (θ, φ) sur la sphère) et sa propre métrique g , comme le feraient des êtres vivants à la surface sans connaître l'espace 3D extérieur.
- **Lien cinématique majeur (§1.3 & §3.1)** : la configuration $\varphi_t : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{M}$ qui associe à chaque particule matérielle X sa position spatiale $x = \varphi_t(X)$ est précisément un **plongement dépendant du temps** de la variété matérielle dans l'espace physique !

— **Règle d'or sur la dimension du bord** : Si $\mathcal{M}$ est de dimension intrinsèque d , son bord $\partial\mathcal{M}$ (s'il existe) est nécessairement une sous-variété lisse de dimension $d - 1$:

$$\dim(\partial\mathcal{M}) = \dim(\mathcal{M}) - 1$$

- Disque D^2 ou hémisphère fermé (dim 2) $\implies$ bord $\partial\mathcal{M} = S^1$ (cercle, dim 1).
- Segment ou arc fermé (dim 1) $\implies$ bord $\partial\mathcal{M} = \{2 \text{ points extrémités}\}$ (dim 0).
- Variétés fermées sans bord ($S^1, S^2, S^1 \times \mathbb{R}$, tore T^2) ou ouvertes ($\mathbb{R}^n$) $\implies \partial\mathcal{M} = \emptyset$.

— **Singularités et redondances de coordonnées :**

- **Singularité de carte (perte de rang)** : en $r = 0$ en polaires ou à la colatitute $s \in \{0, \pi\}$ en sphériques, l'angle devient dégénéré (toutes les valeurs d'angle représentent le même point géométrique).
- **Redondance** : un intervalle de paramétrisation périodique $[0, 2\pi]$ identifie deux fois le même point pour $t = 0$ et $t = 2\pi$. Pour obtenir une carte bijective, on travaille sur le cercle quotient $S^1 = \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$ ou sur un intervalle semi-ouvert $[0, 2\pi[$.

Classification exhaustive des 16 plongements du Recueil officiel (APE 1) :

N°	Description	Dim. int.	Dim. amb.	Variété	Bord	Remarques coordonnées
1	Cercle dans $\mathbb{R}^2$	1	2	S^1	Aucun	Implicite régulière : $x^2 + y^2 = 1$ ($\nabla f \neq 0$)
2	Cercle dans $\mathbb{R}^3$	1	3	S^1	Aucun	Intersection $x^2 + y^2 = 1$ et plan $z = 0$
3	Cercle paramétré	1	2	S^1	Aucun	Plongement standard $\iota_1([t]) = (\cos t, \sin t)$
4	Ellipse	1	2	S^1	Aucun	$\iota_2([t]) = (2 \cos t, \sin t)$, dif- féomorphe à S^1
5	Courbe gauche fermée	1	3	S^1	Aucun	$\iota_3([t]) = (\cos t, \sin t, \varepsilon \sin(2t))$, sans croisement
6	Disque fermé dans $\mathbb{R}^2$	2	2	Disque D^2	S^1 (dim 1)	Inégalité $x^2 + y^2 \leq 1$, variété compacte à bord
7	Disque elliptique	2	2	Disque D^2	Ellipse (dim 1)	Inégalité $x^2/a^2 + y^2/b^2 \leq 1 \cong$ disque unité fermé
8	Graphe de fonction	2	3	Plan $\mathbb{R}^2$	Aucun	$(x, y, \cos(x^2 + y^2))$, carte glo- bale lisse et injective
9	Graphe en polaires	2	3	Plan $\mathbb{R}^2$	Aucun	Même surface, mais singula- rité en $r = 0$
10	Sphère implicite dans $\mathbb{R}^3$	2	3	Sphère S^2	Aucun	$x^2 + y^2 + z^2 = 1$, compacte sans bord
11	Cylindre infini dans $\mathbb{R}^3$	2	3	$S^1 \times \mathbb{R}$	Aucun	$x^2 + y^2 = 1$, produit cartésien cercle $\times$ droite
12	Hémisphère supérieur fermé	2	3	Disque D^2	S^1 (dim 1)	$x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0 \cong D^2$, bord équatorial en $z = 0$
13	Demi-cercle fermé	1	3	Intervalle $[0, 1]$	2 pts (dim 0)	Cercle avec $z = 0, x \geq 0$, bord : $(0, \pm 1, 0)$
14	Quart de cercle fermé	1	3	Intervalle $[0, 1]$	2 pts (dim 0)	Cercle avec $z = 0, x \geq 0, y \geq$ 0, bord : $(1, 0, 0)$ et $(0, 1, 0)$
15	Paramétrisation sphérique	2	3	Sphère S^2	Aucun	Pôles en $s = 0, \pi$ et rebou- clage pour $t \in \{0, 2\pi\}$
16	Hélice circulaire	1	3	Droite $\mathbb{R}$	Aucun	$(\cos t, \sin t, t)$, plongement propre régulier de $\mathbb{R}$

Définition — Espace tangent et vecteur vitesse

Soit $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}$ une trajectoire et $p = \gamma(t_0)$. Le **vecteur tangent** est

$$v := \left. \frac{d\gamma}{dt} \right|_{t_0} \in T_p \mathcal{M}.$$

L'espace tangent $T_p \mathcal{M}$ rassemble toutes les vitesses instantanées possibles en p . Dans une carte (x^i) , la **base coordonnée** est $e_i(p) = \left. \frac{\partial x^{-1}}{\partial x^i} \right|_{\chi(p)}$ et

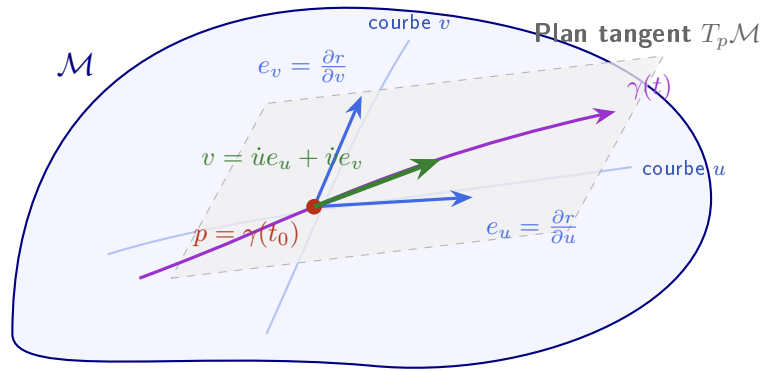
$$v = v^i e_i(p), \quad v^i = \left. \frac{dx^i}{dt} \right|_{t_0}$$

Trajectoire sur une surface plongée (Règle de la chaîne multidimensionnelle) :

Si la surface est paramétrée dans $\mathbb{R}^3$ par $r(u, v)$ et que la particule suit la courbe temporelle $t \mapsto (u(t), v(t))$, sa vitesse s'obtient par la règle de dérivation des fonctions composées :

$$v(t) = \frac{d}{dt} r(u(t), v(t)) = \frac{\partial r}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial r}{\partial v} \frac{dv}{dt} = \dot{u} e_u + \dot{v} e_v$$

Les dérivées partielles $e_u := \partial r / \partial u$ et $e_v := \partial r / \partial v$ forment la base locale du plan tangent $T_p \mathcal{M}$.



Définition — Covecteur et différentielle

La **différentielle** de $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ au point p est le **covecteur**

$$df_p : T_p \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad df_p(v) = \frac{\partial f}{\partial x^i} v^i.$$

La **base duale** $(dx^1, \dots, dx^n)$ vérifie $dx^i(e_j) = \delta_j^i$ et extrait directement la i -ième composante : $dx^i(v) = v^i$.

$$df_p = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i, \quad df_p(v) = \frac{\partial f}{\partial x^i} v^i$$

- df_p est défini **sans métrique**.
- $df_p(v)$ est la **dérivée directionnelle** de f suivant v (taux de variation temporel observé le long de la trajectoire).
- **Réflexe isotherme / surface de niveau** : Si $df_p(v) = 0$, la particule se déplace instantanément le long d'une **surface de niveau** ($f = \text{cste}$), et sa vitesse v est **orthogonale au gradient** ($v \perp \text{grad } f$).

Visualisation intuitive : Vecteur vs Covecteur (La carte topographique) :

- Un **vecteur** $v \in T_p \mathcal{M}$ est une **flèche** (direction et vitesse de marche d'un randonneur).
- Un **covecteur** $df \in T_p^* \mathcal{M}$ est un **empilement de courbes de niveau** parallèles (comme les courbes d'altitude de 10 en 10 mètres sur une carte de randonnée). Plus la pente est forte, plus les lignes sont resserrées.
- L'action scalaire $df(v)$ compte simplement le **nombre de lignes franchies par seconde**. On peut compter des lignes franchies sans règle ni équerre : df et $df(v)$ sont **100% affines et sans métrique**.
- Le **gradient** $\text{grad } f$, lui, est la flèche de plus grande pente, orthogonale aux courbes de niveau. Pour définir l'orthogonalité et la longueur d'une flèche, la **métrique** g est **indispensable**.

Propriété — Lois de transformation

Sous le changement de coordonnées $(x^i) \rightarrow (\tilde{x}^j)$, avec $A_j^i := \partial x^i / \partial \tilde{x}^j$:

$$\tilde{v}^j = (A^{-1})_i^j v^i \quad (\text{contravariant}), \quad \tilde{\omega}_j = A_j^i \omega_i \quad (\text{covariant})$$

La contraction $\omega_i v^i$ est invariante par changement de coordonnées.

Définition — Convention d'Einstein et typage indiciel

La convention de sommation d'Einstein allège les notations en omettant le symbole $\sum$:

- **Indice muet (sommé)** : tout indice apparaissant **exactement deux fois** dans un monôme,

une fois en haut et une fois en bas :

$$a_i b^i := \sum_{i=1}^n a_i b^i = a_1 b^1 + a_2 b^2 + \cdots + a_n b^n$$

- **Indice libre** : indice qui n'apparaît qu'une seule fois par terme. Il fixe la nature de l'objet et doit figurer à la même hauteur et avec le même nom dans chaque terme d'une équation.
- **L'opérateur de dérivation partielle** $\partial_i := \frac{\partial}{\partial x^i}$ porte un **indice inférieur** (dérivation par rapport à une coordonnée contravariante x^i). La quantité $\partial_i f$ est donc un **covecteur** (1-forme df).

Décodage instantané de la nature d'une expression tensorielle :

Signature des indices libres	Nature géométrique	Exemple typique	Ordre tensoriel
0 indice libre	Scalaire (invariant)	$a_i b^i, \omega_i v^i, L^i_i = \text{tr } L$	Ordre 0
1 indice libre en haut	Vecteur (contravariant)	$v^i, L^i_j b^j, (a_k b^k) c^i$	Ordre 1
1 indice libre en bas	Covecteur (covariant)	$\omega_i, a_j L^j_i, \partial_i f, (\partial_i \partial_j f) b^j$	Ordre 1
2 indices libres	Tenseur d'ordre 2 / Matrice	$L^i_j M^j_k, a_i b^j, \partial_i \partial_j f, g_{ij}$	Ordre 2

Attention — Pièges d'examen : Règles formelles d'Einstein

Quatre règles impératives à vérifier sous peine de zéro immédiat à l'examen :

- 1. Jamais trois fois le même indice** : Une écriture comme $a_i b^i c^i$ est **strictement interdite** et mathématiquement ambiguë.
- 2. Jamais deux fois le même indice à la même hauteur sans métrique** : L'expression $L^i_j b^i$ viole la règle de contraction (deux indices hauts).
- 3. L'astuce mnémotechnique officielle du Syllabus (§A.4) :**
 Dans le mot **conTravariant**, le **T** correspond à **Top** (en haut) $\implies$ les indices des **composantes contravariantes** se placent **en haut** (v^i, x^i, S^{ij}).
 Dans le mot **covariant**, pas de T $\implies$ les indices des **composantes covariantes** se placent **en bas** ($\omega_i, \partial_i, T_{ij}$).
Règle de dualité des bases : Pour les éléments de base, la position est inversée (e_i en bas, dx^i en haut) afin que chaque contraction d'Einstein associe un indice haut et un indice bas : $v = v^i e_i$, $\omega = \omega_i dx^i$.
- 4. Piège fatal : $\partial_i \partial_i f$ n'est pas le laplacien en curviligne !**
 En coordonnées cartésiennes, $\sum_i \partial_i^2 f$ est le laplacien. Mais l'écriture $\partial_i \partial_i f$ comporte deux indices bas : elle est **interdite en calcul tensoriel général** car non invariante par changement de carte. Pour contracter deux dérivées, il faut impérativement la métrique inverse g^{ij} . L'expression rigoureuse du laplacien (Laplace–Beltrami) est :

$$\Delta f = g^{ij} \nabla_i \nabla_j f = g^{ij} \left(\partial_i \partial_j f - \Gamma_{ij}^k \partial_k f \right)$$

Définition — Métrique et distinction des deux normales

La **métrique** au point p est une application bilinéaire, symétrique, définie positive :

$$g_p : T_p \mathcal{M} \times T_p \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Elle permet de mesurer les **longueurs** et les **angles** :

$$\|v\|_g = \sqrt{g_p(v, v)}, \quad \cos \theta = \frac{g_p(u, v)}{\|u\|_g \|v\|_g}$$

Ses composantes dans la base coordonnée sont $g_{ij} = g_p(e_i, e_j)$, et $g_p(u, v) = g_{ij} u^i v^j$.

Changement de coordonnées : $[\tilde{g}] = A^T[g]A$ (identique à la métrique induite!).

Deux normales à ne pas confondre (§1.7, Figure 1.5 du Syllabus) :

- $\mathbf{N} \perp T_p\mathcal{M}$: **normale extrinsèque** à une membrane $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3$. Elle est orthogonale à tout le plan tangent et vit dans l'espace ambiant extérieur (objet extrinsèque dépendant du plongement).
- $\boldsymbol{\nu} \in T_p\mathcal{M}$: **normale intrinsèque** à une courbe γ tracée sur la membrane ($g_p(\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\tau}) = 0$). Elle vit **dans la membrane** (objet intrinsèque calculé avec la métrique g de $\mathcal{M}$).
- $\mathbf{n}$: normale à une surface de coupe interne dans un milieu 3D continu (utilisée pour définir le vecteur de traction $\mathbf{t}(\mathbf{n}) = \sigma\mathbf{n}$).

Propriété — Bases coordonnées, orthonormées et facteurs d'échelle

- **Base coordonnée** (e_i) : déterminée par les courbes coordonnées ($e_i = \partial/\partial x^i$). Elle n'est en général ni orthogonale ni unitaire ($g_{ij} = g(e_i, e_j)$).
- **Facteurs d'échelle (coefficients de Lamé)** : en coordonnées orthogonales ($g_{ij} = 0$ pour $i \neq j$), la longueur des vecteurs de base vaut :

$$h_i := \|e_i\|_g = \sqrt{g_{ii}} \quad (\text{sans sommation})$$

- **Base orthonormée** ($\hat{e}_i$) : $\hat{e}_i = e_i/h_i$, satisfaisant $g_p(\hat{e}_i, \hat{e}_j) = \delta_{ij}$.
- **Matrice de passage H et composantes physiques** : en posant $H = \text{diag}(h_1, \dots, h_n)$, les composantes physiques $\hat{v}^i$ (qui ont toutes la même unité dimensionnelle) vérifient :

$$[v]_{\text{orth}} = H [v]_{\text{coord}} \iff \hat{v}^i = h_i v^i, \quad [\nabla u]_{\text{orth}} = H [\nabla u]_{\text{coord}} H^{-1}$$

- **Coordonnées cartésiennes** : coordonnées où la base coordonnée est orthonormée en *tout point* du domaine ($g_{ij}(x) = \delta_{ij}$ et $h_i = 1$).

Exemple — Coordonnées polaires dans le plan

En coordonnées polaires (r, θ) :

$$[g]_{(r,\theta)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}, \quad h_r = \|e_r\| = 1, \quad h_\theta = \|e_\theta\| = r, \quad \hat{e}_r = e_r, \quad \hat{e}_\theta = \frac{e_\theta}{r}.$$

Pour $v = v^r e_r + v^\theta e_\theta$: composantes physiques $\hat{v}^r = v^r$, $\hat{v}^\theta = r v^\theta$.

Théorème — Du covecteur au gradient (Théorème de représentation de Riesz)

Par le **théorème de représentation de Riesz**, le gradient est l'unique vecteur $\text{grad } f \in T_p\mathcal{M}$ représentant l'action de la forme linéaire df_p via le produit scalaire métrique :

$$df_p(v) = g_p(\text{grad } f, v) \quad \forall v \in T_p\mathcal{M} \implies (\text{grad } f)^i = g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^j}$$

- $df_p = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$: covecteur (forme linéaire), défini **sans métrique**.
- $\text{grad } f = g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^j} e_i$: vecteur physique, nécessite la métrique (opération de montée d'indice).
- En coordonnées cartésiennes ($g^{ij} = \delta^{ij}$) : $\text{grad } f = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x^i} e_i$.

Attention — Piège d'examen : différentielle $\neq$ gradient

- Ne **jamais** confondre df (covecteur, pas de métrique) et $\text{grad } f$ (vecteur, dépend de g).
- En coordonnées curvilignes, $(\text{grad } f)^i \neq \partial f / \partial x^i$ en général !
- Les composantes du gradient en polaires sont $(\partial_r f, r^{-2} \partial_\theta f)$ et **pas** $(\partial_r f, \partial_\theta f)$.

Propriété — Métriques plates vs courbes

- **Plate (euclidienne)** : il existe des coordonnées cartésiennes locales ($g_{ij} = \delta_{ij}$). Critère : $\text{Riem}(g) = 0$.
- **Courbe** : aucun système de coordonnées ne rend $g_{ij} = \delta_{ij}$ au voisinage d'un point.
- En dimension 2, toute l'information de courbure est dans la **courbure de Gauss** K .

Surface	Métrique	Courbure K
Plan $((x, y) \text{ ou } (r, \theta))$	$\text{diag}(1, 1) \text{ ou } \text{diag}(1, r^2)$	0 (plate)
Cylindre $(R\theta, z)$	$\text{diag}(R^2, 1)$	0 (plate !)
Sphère (θ, φ)	$\text{diag}(R^2, R^2 \sin^2 \theta)$	$1/R^2$ (courbe)

Attention — Piège classique : cylindre vs sphère

Le **cylindre** est intrinsèquement **plat** ($K = 0$) même s'il est courbé dans $\mathbb{R}^3$! On peut le dérouler en un plan sans déformer les longueurs. La **sphère** est intrinsèquement **courbe** ($K = 1/R^2$) : impossible de l'aplatir sans distorsion.

Piège : Une matrice $[g] \neq I$ ne signifie pas que la métrique est courbe (exemple : polaires dans le plan).

Théorème — Ontologie : Ce qui change vs ce qui est invariant

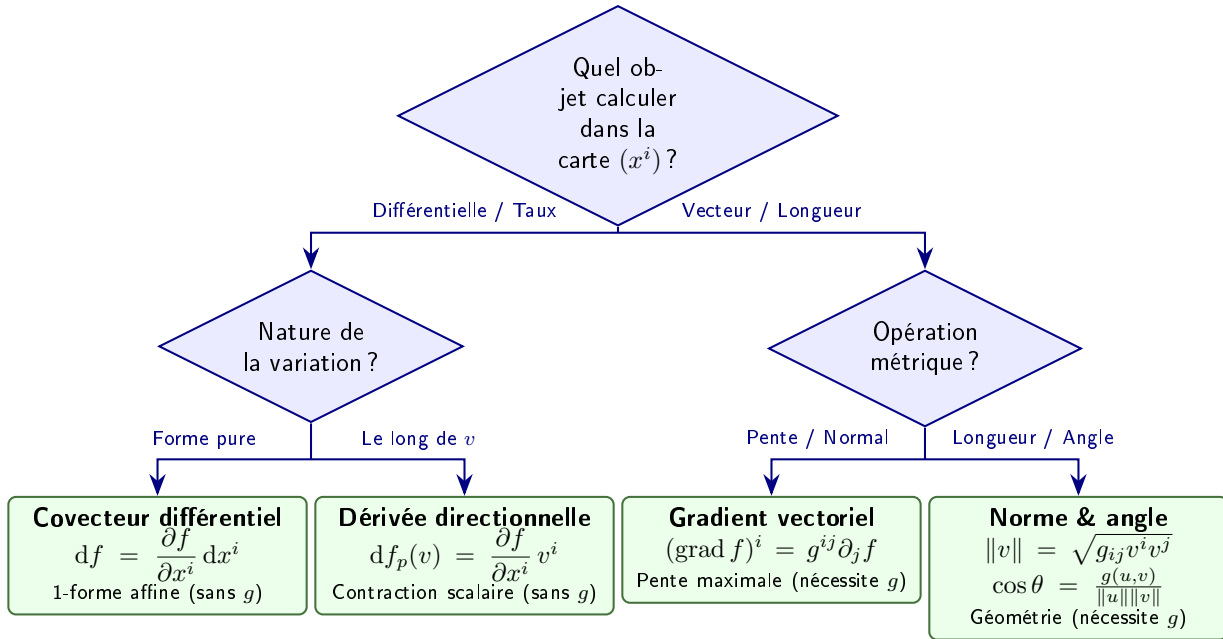
Toute la géométrie de l'APE 1 repose sur la distinction fondamentale entre la description numérico-dépendante (carte) et la réalité physique objective (variété) :

Objet mathématique / physique	Change avec la carte	Reste invariant
Coordonnées du point $(x^1, \dots, x^n)$	✓	
Point géométrique $P \in \mathcal{M}$ (position réelle $\gamma(t)$)		✓
Vecteurs de base coordonnée $\{e_i\}$	✓	
Composantes contravariantes v^i	✓	
Vecteur tangent intrinsèque $v = v^i e_i$		✓
Formes de base duale $\{dx^i\}$	✓	
Composantes covariantes ω_i (ou $\partial_i T$)	✓	
Covecteur différentiel $dT = \partial_i T dx^i$		✓
Contraction scalaire $dT(v) = \omega(v) = \omega_i v^i$		✓

Bilan fondamental : Les notions de variété, de trajectoire, de vecteur vitesse, de différentielle dT et de contraction scalaire $dT(v)$ sont **100% affines et différentielles**. Elles ne font appel à **aucune métrique**, aucune longueur et aucun angle !

1.2 Procédures de résolution

1.2.1 Arbre décisionnel : quel objet géométrique manipuler ?



Procédure : Calculer le gradient dans des coordonnées curvilignes

Donnée : Un champ scalaire f et un système de coordonnées (x^i) avec métrique $[g]$.

Étape 1 Écrire la métrique $[g_{ij}]$ et calculer son inverse $[g^{ij}]$.

Étape 2 Calculer les dérivées partielles $\partial_j f$ pour chaque coordonnée.

Étape 3 Appliquer la formule : $(\text{grad } f)^i = g^{ij} \partial_j f$ (somme sur j).

Étape 4 Écrire le résultat dans la base coordonnée : $\text{grad } f = (\text{grad } f)^i e_i$.

Étape 5 (Optionnel) Convertir en composantes physiques : $[\text{grad } f]_{\text{orth}} = H [\text{grad } f]_{\text{coord}}$ avec $H = \text{diag}(h_1, \dots)$.

Astuce — Gradient en coordonnées orthogonales

Pour une métrique diagonale $[g] = \text{diag}(h_1^2, \dots, h_n^2)$:

$$\boxed{(\text{grad } f)^i = \frac{1}{h_i^2} \frac{\partial f}{\partial x^i}} \quad (\text{base coordonnée}), \quad \widehat{(\text{grad } f)}^i = \frac{1}{h_i} \frac{\partial f}{\partial x^i} \quad (\text{base orthonormée})$$

Procédure : Calculer un changement de base

Donnée : Un vecteur v ou covecteur ω connu dans la base E , un changement de coordonnées $(x^i) \rightarrow (\tilde{x}^j)$.

Étape 1 Former la matrice jacobienne $A_j^i = \partial x^i / \partial \tilde{x}^j$ (anciennes coordonnées en lignes, nouvelles en colonnes).

Étape 2 Calculer son inverse A^{-1} et sa transposée A^T .

Étape 3 Transformer les bases : $[\tilde{e}] = [e] A \iff \tilde{e}_j = A_j^i e_i$.

Étape 4 Transformer les composantes :

- Vecteur (contravariant) : $[v]_{\tilde{E}} = A^{-1} [v]_E \iff \tilde{v}^j = (A^{-1})^j_i v^i$.
- Covecteur (covariant) : $[\omega]_{\tilde{E}^*} = A^T [\omega]_{E^*} \iff \tilde{\omega}_j = A_j^i \omega_i$.
- Métrique : $[g]_{\tilde{E}} = A^T [g]_E A \iff \tilde{g}_{ij} = A_i^k A_j^l g_{kl}$.

Étape 5 Vérification d'invariance : Le produit scalaire et la contraction $\omega(v) = \omega_i v^i$ doivent rester rigoureusement inchangés.

Astuce — Cartésien $\longleftrightarrow$ Polaires et invariance

Pour le passage $(x, y) \rightarrow (r, \theta)$ avec $x = r \cos \theta$ et $y = r \sin \theta$:

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\frac{\sin \theta}{r} & \frac{\cos \theta}{r} \end{pmatrix}, \quad A^T = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -r \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix}$$

— **Composantes vectorielles** (A^{-1}) :

$$\begin{pmatrix} v^r \\ v^\theta \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} v^x \\ v^y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} v^r = v^x \cos \theta + v^y \sin \theta \\ v^\theta = \frac{-v^x \sin \theta + v^y \cos \theta}{r} \end{cases}$$

Dimension : v^θ a la dimension d'une vitesse angulaire ($[s^{-1}]$ ou rad/s).

— **Composantes covectorielles** (A^T) :

$$\begin{pmatrix} \omega_r \\ \omega_\theta \end{pmatrix} = A^T \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \omega_r = \omega_x \cos \theta + \omega_y \sin \theta \\ \omega_\theta = -r \sin \theta \omega_x + r \cos \theta \omega_y \end{cases}$$

Dimension : ω_θ a la dimension $[\omega_x] \times [\text{longueur}]$ (présence du facteur r).

— **Démonstration matricielle de l'invariance (Question type d'examen)** :

$$\begin{aligned} \omega(v) &= [\omega]_{\tilde{E}^*}^T [v]_{\tilde{E}} = (A^T [\omega]_E)^T (A^{-1} [v]_E) \\ &= [\omega]_E^T \underbrace{(A^T)^T A^{-1}}_{AA^{-1}=I} [v]_E = [\omega]_E^T [v]_E = \omega_x v^x + \omega_y v^y \end{aligned}$$

Les lois duales A^T et A^{-1} se compensent exactement pour garantir un invariant scalaire universel.

Exemple — Trajectoire sur surface et différentielle (APE 1)

On considère la surface paramétrée dans $\mathbb{R}^3$ par $r(u, v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ uv \end{pmatrix}$ et la trajectoire temporelle $t \mapsto$

$(u(t), v(t))$ définie par $u(t) = 1 + t$ et $v(t) = 2 - t$.

1. Vecteurs de base coordonnée :

Les dérivées partielles forment la base tangente locale $T_p \mathcal{M}$ en tout point régulier :

$$e_u = \frac{\partial r}{\partial u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ v \end{pmatrix}, \quad e_v = \frac{\partial r}{\partial v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ u \end{pmatrix}$$

2. Vecteur vitesse instantanée à $t = 0$ par la règle de la chaîne :

À l'instant $t = 0$, les coordonnées valent $(u(0), v(0)) = (1, 2)$, et les vitesses coordonnées sont $\dot{u}(0) = 1$ et $\dot{v}(0) = -1$. Par la règle de dérivation multidimensionnelle, sans développer $r(u(t), v(t))$:

$$v(0) = \left. \frac{d}{dt} r(u(t), v(t)) \right|_{t=0} = \dot{u}(0) e_u(1, 2) + \dot{v}(0) e_v(1, 2) = 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + (-1) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3. Variation temporelle d'un champ scalaire de température :

Soit $T(x, y, z) = x + 2y + z$. La 1-forme différentielle est $dT = dx + 2dy + dz \implies [dT] = (1, 2, 1)$.

Le taux de variation instantané ressenti le long du déplacement vaut :

$$\left. \frac{d}{dt} T(r(u(t), v(t))) \right|_{t=0} = dT(v(0)) = 1(1) + 2(-1) + 1(1) = 1 - 2 + 1 = 0$$

Interprétation géométrique fondamentale : À $t = 0$, la trajectoire de la particule est instantanément tangente à une **surface isotherme** ($T = \text{cste} = 5$). Le covecteur dT annule le vecteur vitesse tangent $v(0)$, ce qui traduit l'orthogonalité au sens de la métrique avec le gradient ambiant ($v \perp \nabla T$).

Exemple — La fourmi sur la sphère (APE 1)

Une fourmi parcourt la sphère S_R^2 selon la trajectoire $\gamma(t) = (\theta(t), \varphi(t))$.

1. Base coordonnée et vecteur tangent :

Dans la paramétrisation $r(\theta, \varphi) = (R \sin \theta \cos \varphi, R \sin \theta \sin \varphi, R \cos \theta)^T$, les vecteurs de base sont $e_\theta = \partial_\theta r$ et $e_\varphi = \partial_\varphi r$. Leurs normes valent $\|e_\theta\| = R$ et $\|e_\varphi\| = R \sin \theta$ (**non unitaires**). La vitesse intrinsèque s'écrit directement :

$$v = \dot{\theta} e_\theta + \dot{\varphi} e_\varphi \in T_{\gamma(t)} S^2 \quad (\text{inutile de passer par l'espace ambiant } \mathbb{R}^3!)$$

2. Changement vers la coordonnée verticale $z = R \cos \theta$:

On a $\dot{z} = -R \sin \theta \dot{\theta}$ et $\tilde{e}_z = \frac{dz}{d\theta} e_\theta = -\frac{1}{R \sin \theta} e_\theta$. En exprimant la vitesse dans cette nouvelle base $(\tilde{e}_z, \tilde{e}_\varphi)$:

$$v = \dot{z} \tilde{e}_z + \dot{\varphi} \tilde{e}_\varphi = (-R \sin \theta \dot{\theta}) \left(-\frac{1}{R \sin \theta} e_\theta \right) + \dot{\varphi} e_\varphi = \dot{\theta} e_\theta + \dot{\varphi} e_\varphi$$

Les composantes changent ($v^\theta = \dot{\theta}$ vs $\tilde{v}^z = -R \sin \theta \dot{\theta}$), mais le **vecteur physique v est strictement identique**.

3. Différentielle d'un champ de température $T(\theta, \varphi) = T_0 + \alpha \cos \theta + \beta \sin \theta \cos \varphi$:

La 1-forme différentielle est $dT = \partial_\theta T d\theta + \partial_\varphi T d\varphi$. Son action sur le vecteur v donne :

$$dT(v) = \partial_\theta T \dot{\theta} + \partial_\varphi T \dot{\varphi} = (-\alpha \sin \theta + \beta \cos \theta \cos \varphi) \dot{\theta} - (\beta \sin \theta \sin \varphi) \dot{\varphi}$$

Si la température dépend aussi du temps $T(\theta, \varphi, t)$, la variation totale observée par la fourmi est :

$$\boxed{\frac{dT_{\text{fourmi}}}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + dT(v)} \iff \text{Dérivée matérielle } \frac{DT}{Dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + v \cdot \nabla T$$

Le premier terme est **local** (en un point fixe) et le second est **advectif** (transport à travers le gradient spatial).

Exemple — Calcul du gradient en polaires

Soit $f(r, \theta) = r^2$ dans le plan euclidien.

Résolution :

- $[g]_{(r, \theta)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}$, $[g^{ij}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/r^2 \end{pmatrix}$.
- $\partial_r f = 2r$, $\partial_\theta f = 0$.
- $(\text{grad } f)^r = 1 \cdot 2r = 2r$, $(\text{grad } f)^\theta = \frac{1}{r^2} \cdot 0 = 0$.
- $\text{grad } f = 2r e_r$.

$$\boxed{\text{grad}(r^2) = 2r e_r}$$

2 Mesure, tenseurs d'ordre deux et opérateurs différentiels

Ce chapitre répond à trois grandes questions : *comment intégrer sur une variété ?*, *comment classer et manipuler les tenseurs d'ordre deux ?* et *comment calculer le gradient, la divergence, le rotationnel et le laplacien en coordonnées quelconques ?* L'outil central est toujours la métrique g , qui détermine l'élément de mesure $\sqrt{\det[g]}$, les opérations de montée/descente d'indice et les symboles de Christoffel.

2.1 Rappels théoriques

Définition — Élément de mesure et intégration

L'élément de mesure sur une variété de dimension n munie de la métrique g est :

$$dV_g = \sqrt{\det[g]} dx^1 \cdots dx^n$$

La mesure d'un domaine $\Omega \subset \mathcal{M}$ est $\text{Mes}_g(\Omega) = \int_{\Omega} dV_g$.

Coordonnées	$[g]$	$\sqrt{\det[g]}$
Cartésiennes (x, y)	I_2	1
Polaires (r, θ)	$\text{diag}(1, r^2)$	r
Sphériques (r, θ, φ)	$\text{diag}(1, r^2, r^2 \sin^2 \theta)$	$r^2 \sin \theta$
Cylindriques (r, θ, z)	$\text{diag}(1, r^2, 1)$	r

Définition — Métrique induite sur une sous-variété

Soit $S \subset \mathcal{M}$ de dimension $k < n$, paramétrée par $\psi(\xi^1, \dots, \xi^k)$. Les vecteurs tangents sont $a_{\alpha} = A_{\alpha}^i e_i$ avec $A_{\alpha}^i = \partial x^i / \partial \xi^{\alpha}$. La **métrique induite** est :

$$[h] = A^T [g] A, \quad h_{\alpha\beta} = g_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial \xi^{\alpha}} \frac{\partial x^j}{\partial \xi^{\beta}}$$

L'élément de mesure sur S est $dV_h = \sqrt{\det[h]} d\xi^1 \cdots d\xi^k$.

- **Courbe** ($k = 1$) : $ds = \sqrt{g(a, a)} d\lambda$.
- **Surface** ($k = 2$) : $dA_h = \sqrt{\det[h]} d\xi^1 d\xi^2$.

Attention — Piège : métrique induite $\neq$ sous-matrice de $[g]$

La métrique induite $[h] = A^T [g] A$ n'est **pas** obtenue en supprimant des lignes/colonnes de $[g]$. Il faut évaluer g sur les **directions réellement tangentes** à la sous-variété.

Définition — Orientation, volume orienté et produit vectoriel

Sur une variété de dimension n munie d'une métrique g et d'une **orientation**, on définit le **volume orienté** de n vecteurs par

$$\text{Vol}_g(v_1, \dots, v_n) = \pm \sqrt{\det[g]} \det(Q),$$

où Q est la matrice des composantes v_{α}^i et le signe est $+$ si la base est positivement orientée.

Produit vectoriel métrique (dimension 3 uniquement) : l'unique vecteur $u \times_g v$ tel que

$$g(u \times_g v, w) = \text{Vol}_g(u, v, w) \quad \forall w \in T_p \mathcal{M}$$

- $u \times_g v$ est orthogonal (au sens de g) à u et v .
- $\|u \times_g v\|_g^2 = (u \cdot u)(v \cdot v) - (u \cdot v)^2$ (identité de Lagrange / aire² du parallélogramme).
- **Composantes explicites en base coordonnée (§2.3, Éq. 2.41 du Syllabus) :**

$$(u \times_g v)^i = \frac{1}{\sqrt{\det[g]}} g^{il} \varepsilon_{\ell j k} u^j v^k \quad \text{avec } \varepsilon_{\ell j k} \text{ le symbole de permutation de Levi-Civita.}$$

- **Lien déterminant–produit vectoriel (§2.3, Éq. 2.44) :** $\sqrt{\det[g]} = g(e_1 \times_g e_2, e_3) = (e_1 \times_g e_2) \cdot e_3$.
- En coordonnées cartésiennes orientées ($[g] = I$) : $(u \times v)^i = \varepsilon_{ijk} u^j v^k$ (formule classique).

Attention — Piège : $\times$ n'existe qu'en dimension 3

- Le produit vectoriel **n'est pas défini** en dimension 2 ni en dimension ≥ 4 .
- En dimension 2, l'analogue est le **scalaire** $\text{Vol}_g(u, v) = \sqrt{\det[g]} (u^1 v^2 - u^2 v^1)$.
- Ne pas confondre le $\times$ euclidien classique avec le $\times_g$ métrique en coordonnées curvilignes !

Définition — Tenseurs d'ordre deux et variances de I_2 (APE 2)

Une matrice de nombres réels $n \times n$ ne suffit pas à définir un objet géométrique : il faut impérativement spécifier sa **variance tensorielle** :

Variance	Écriture	Entrée	Sortie	Loi de transformation	Exemples clés
Covariant (0, 2)	$T = T_{ij} dx^i \otimes dx^j$	2 vecteurs	scalaire	$[T]_{\tilde{E}} = A^T [T]_E A$	Métrique g , Cauchy–Green C , Green–Lagrange E
Mixte (1, 1)	$L = L_j^i e_i \otimes dx^j$	1 vecteur	vecteur	$[L]_{\tilde{E}} = A^{-1} [L]_E A$	Identité I , gradient de vitesse $L = \nabla v$, contrainte σ
Contravariant (2, 0)	$S = S^{ij} e_i \otimes e_j$	2 covecteurs	scalaire	$[S]_{\tilde{E}} = A^{-1} [S]_E A^{-T}$	Métrique inverse g^{-1} (montée d'indices)

Le paradoxe des trois matrices identité (Question classique d'examen) :

Dans un repère cartésien orthonormé, g , I et g^{-1} sont tous représentés par la matrice identité I_n . Pourtant, sous un changement de base A :

- $[g]_{\tilde{E}} = A^T A \neq I_n$ en général (se dilate ou se distord).
- $[I]_{\tilde{E}} = A^{-1} I_n A = A^{-1} A = I_n$: le symbole de Kronecker mixte δ_j^i est un **invariant tensoriel absolu** ! Ses composantes valent δ_j^i dans **absolument toutes les bases**.
- $[g^{-1}]_{\tilde{E}} = A^{-1} A^{-T} = (A^T A)^{-1} = [g]_{\tilde{E}}^{-1}$: garantit que la métrique inverse reste rigoureusement l'inverse matriciel de g .

Contraction métrique universelle :

La contraction de la métrique avec son inverse donne l'identité mixte :

$$g_{ik} g^{kj} = \delta_i^j \quad (k \text{ est sommé/muet, } i \text{ et } j \text{ sont libres} \implies \text{tenseur mixte } (1, 1))$$

Propriété — Opérations tensorielles intrinsèques vs métriques

— Opérations sur un tenseur mixte $L : T_p \mathcal{M} \rightarrow T_p \mathcal{M}$ (endomorphisme) :

- **Trace (sans métrique)** : $\text{tr } L = L_i^i = \text{Tr}([L])$. Invariante par changement de base car $\text{Tr}(A^{-1} [L] A) = \text{Tr}([L])$.
- **Déterminant (sans métrique)** : $\det L = \det [L]$.
- **Adjoint métrique (avec métrique g)** : défini par $g(Lu, v) = g(u, L^\dagger v)$, soit matriciellement :

$$[L^\dagger] = [g]^{-1} [L]^T [g]$$

- **Parties symétrique et antisymétrique métriques :**

$$\text{sym}_g L = \frac{1}{2}(L + L^\dagger), \quad \text{skw}_g L = \frac{1}{2}(L - L^\dagger)$$

En base orthonormée ($[g] = I$), $[L^\dagger] = [L]^T$ et l'on retrouve la symétrie matricielle usuelle.

- **Opérations sur un tenseur covariant T (nécessitent impérativement g) :**
 - **Trace métrique** : $\text{tr}_g T = g^{ij} T_{ij} = \text{Tr}([g]^{-1}[T])$. **Attention** : La trace matricielle naïve $\text{Tr}([T])$ n'est PAS un invariant tensoriel !
 - **Déterminant métrique** : $\det_g T = \frac{\det[T]}{\det[g]} = \det([g]^{-1}[T])$.
- **Double contraction tensorielle (§2.5.4 du Syllabus) :**
 - **Contravariant / Covariant (sans métrique)** : $S : T := S^{ij} T_{ij}$.
 - **Deux tenseurs mixtes (produit scalaire métrique de Frobenius)** : $L : M := \text{tr}(L^\dagger M)$. En base orthonormée : $L : M = \text{tr}(L^T M) = L^i_j M^i_j$.
- **Dualité conceptuelle de la formule $A^T[g]A$:**
 - **Changement de coordonnées** : A est carrée et inversible ($n \times n$). On exprime la **même métrique** dans une nouvelle carte.
 - **Immersion / Plongement** : A est rectangulaire ($N \times n$, $N > n$) et de rang plein. On induit une **nouvelle métrique intrinsèque h** sur la sous-variété par tiré en arrière (pull-back).

Propriété — Synthèse des opérations tensorielles

Opération	Covariant T	Mixte L	Contravariant S
Action naturelle	$T(u, v)$: scalaire	Lu : vecteur	$S(\alpha, \beta)$: scalaire
Transposée / Adjoint	Directe : $(T^T)_{ij} = T_{ji}$	Adjoint avec $g : [L^\dagger] = [g]^{-1}[L]^T[g]$	Directe : $(S^T)^{ij} = S^{ji}$
Trace	Avec $g : g^{ij} T_{ij}$	Directe : L^i_i	Avec $g : g_{ij} S^{ij}$
Déterminant	Avec $g : \det(g^{-1}T)$	Direct : $\det L$	Avec $g : \det(Sg)$
Inverse	$\rightarrow$ contravariant	$\rightarrow$ mixte	$\rightarrow$ covariant
Valeurs propres	Avec g : v.p. de $g^{-1}T$	Directes : $Lv = \lambda v$	Avec g : v.p. de Sg
Composition	Pas directe entre 2 cov.	Directe : LM	Pas directe entre 2 contrav.

Règle clé : En base **orthonormée**, $[g] = I$ et toutes les opérations se réduisent aux opérations matricielles habituelles. En base **quelconque**, la métrique intervient dès qu'on mélange indices hauts et bas.

Théorème — Gradient covariant d'un champ vectoriel

Le gradient covariant ∇u est un tenseur mixte dont les composantes sont :

$$(\nabla u)_j^i = \nabla_j u^i = \frac{\partial u^i}{\partial x^j} + \Gamma_{jk}^i u^k$$

avec les **symboles de Christoffel** : $\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2} g^{i\ell} \left(\frac{\partial g_{\ell k}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{\ell j}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^\ell} \right)$.

En coordonnées **cartésiennes** : $\Gamma_{jk}^i = 0$ et $(\nabla u)_j^i = \partial u^i / \partial x^j$ (jacobienne).

Compatibilité métrique (Lemme de Ricci / Levi-Civita, §2.6) :

$$\nabla g = 0 \iff \nabla_k g_{ij} = 0, \quad \nabla g^{-1} = 0 \iff \nabla_k g^{ij} = 0$$

La métrique est « constante » pour la dérivation covariante : on peut **monter ou descendre les indices sous le symbole ∇** sans générer de termes supplémentaires : $\nabla_k (g_{ij} v^j) = g_{ij} \nabla_k v^j$.

Sens physique fondamental de Γ_{jk}^i (La taxe de rotation des repères curvilignes) :

- En coordonnées cartésiennes, les vecteurs de base (e_x, e_y, e_z) sont constants partout : $\partial_j e_k = 0 \implies \Gamma_{jk}^i = 0$.
- En coordonnées curvilignes (ex : polaires), les vecteurs de base tournent et changent d'échelle d'un point à l'autre : $\partial_j e_k = \Gamma_{jk}^i e_i$.
- Par la règle de Leibniz, dériver $u = u^k e_k$ donne deux termes : $\partial_j u = (\partial_j u^k) e_k + u^k (\partial_j e_k) = (\partial_j u^i + \Gamma_{jk}^i u^k) e_i$.
- Le symbole de Christoffel Γ_{jk}^i est précisément le **terme correctif qui compense la rotation et la déformation de la base coordonnée**.

Théorème — Divergence

$$\operatorname{div} u = \operatorname{tr}(\nabla u) = \frac{1}{\sqrt{\det[g]}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\sqrt{\det[g]} u^i \right)$$

En cartésiennes : $\operatorname{div} u = \partial_i u^i$. **Théorème de la divergence** (Gauss–Ostrogradski) :

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} u \, dV_g = \int_{\partial\Omega} g(u, n) \, dA_h$$

Théorème — Rotationnel (dimension 3 orientée)

Le rotationnel représente vectoriellement la partie antisymétrique de ∇u :

$$[\operatorname{rot} u] = \begin{pmatrix} \partial_2 u^3 - \partial_3 u^2 \\ \partial_3 u^1 - \partial_1 u^3 \\ \partial_1 u^2 - \partial_2 u^1 \end{pmatrix} \quad (\text{coordonnées cartésiennes})$$

Le rotationnel dépend de la métrique **et** de l'orientation. Il n'est défini comme vecteur qu'en dimension 3.

Théorème — Laplacien d'un champ scalaire

$$\Delta f = \operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = \frac{1}{\sqrt{\det[g]}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\sqrt{\det[g]} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^j} \right)$$

En cartésiennes : $\Delta f = \sum_i \partial^2 f / \partial (x^i)^2$.

Propriété — Divergence d'un tenseur mixte d'ordre deux

Soit $L = L_j^i e_i \otimes dx^j$ un champ de tenseurs mixtes. Sa divergence est un champ **vectoriel** :

$$(\operatorname{div} L)^i = \nabla_j L^{ij} = \frac{1}{\sqrt{\det[g]}} \frac{\partial}{\partial x^j} \left(\sqrt{\det[g]} L^{ij} \right) + \Gamma_{j\ell}^i L^{\ell j}$$

où $L^{ij} = L_k^i g^{kj}$ (indice relevé par la métrique).

En coordonnées **cartésiennes** euclidiennes : $(\operatorname{div} L)^i = \partial_j L_j^i$.

Application : l'équilibre local des contraintes s'écrit $\operatorname{div} \sigma + f_{\text{vol}} = \rho a$, où $\operatorname{div} \sigma$ est la divergence du tenseur de Cauchy.

Propriété — Gradient covariant dans les coordonnées usuelles

Plan polaire (r, θ) (base coordonnée, $\Gamma_{\theta\theta}^r = -r$, $\Gamma_{r\theta}^\theta = 1/r$) :

$$[\nabla u]_{\text{coord}} = \begin{pmatrix} \partial_r u^r & \partial_\theta u^r - r u^\theta \\ \partial_r u^\theta + u^\theta/r & \partial_\theta u^\theta + u^r/r \end{pmatrix}$$

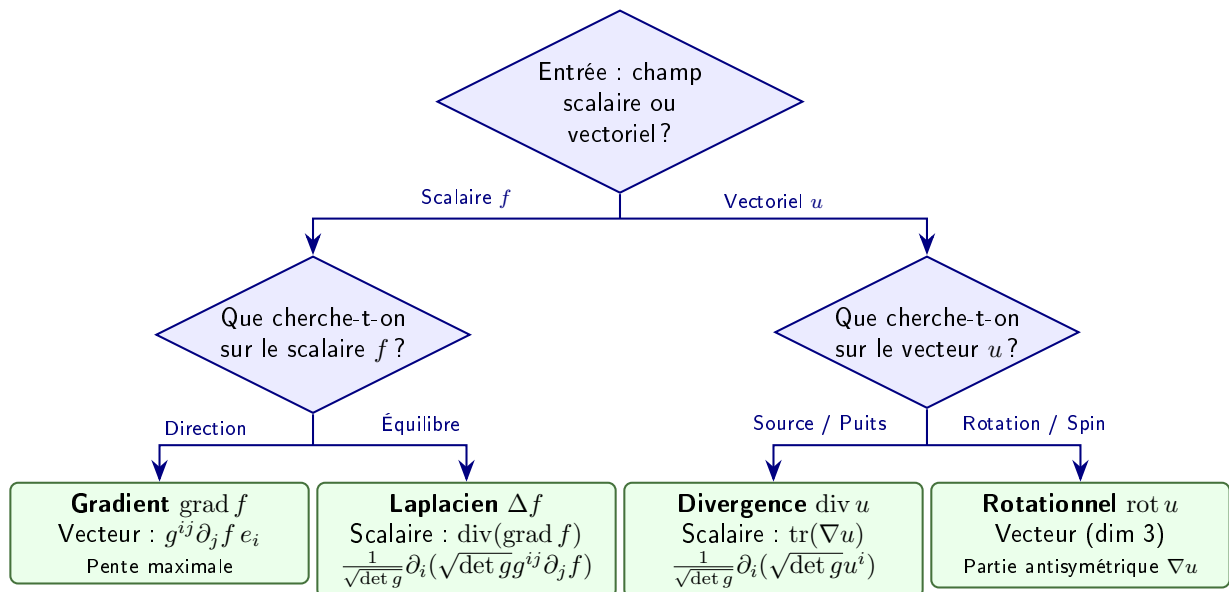
Cylindriques 3D (r, θ, z) (base coordonnée) :

$$[\nabla u]_{\text{coord}} = \begin{pmatrix} \partial_r u^r & \partial_\theta u^r - r u^\theta & \partial_z u^r \\ \partial_r u^\theta + u^\theta/r & \partial_\theta u^\theta + u^r/r & \partial_z u^\theta \\ \partial_r u^z & \partial_\theta u^z & \partial_z u^z \end{pmatrix}$$

Passage base coord $\rightarrow$ orthonormée : $[\nabla u]_{\text{orth}} = H [\nabla u]_{\text{coord}} H^{-1}$ avec $H = \text{diag}(h_1, \dots, h_n)$.

2.2 Procédures de résolution

2.2.1 Arbre décisionnel : quel opérateur différentiel utiliser ?



Procédure : Mesurer avec une métrique : longueurs et angles

Donnée : Deux vecteurs $u = u^i e_i$ et $v = v^j e_j$ dans une base coordonnée avec métrique $[g_{ij}]$.

Étape 1 Former la matrice métrique $[g]$ au point considéré ($g_{ij} = g(e_i, e_j)$).

Étape 2 Calculer le produit scalaire métrique :

$$g(u, v) = [u]^T [g] [v] = g_{ij} u^i v^j$$

Étape 3 Calculer les normes physiques :

$$\|u\|_g = \sqrt{g(u, u)} = \sqrt{[u]^T [g] [u]}, \quad \|v\|_g = \sqrt{g(v, v)}$$

Étape 4 Déterminer l'angle géométrique réel :

$$\cos \theta = \frac{g(u, v)}{\|u\|_g \|v\|_g} \quad (\text{Orthogonalité si et seulement si } g(u, v) = 0)$$

Étape 5 Passer en base orthonormée (composantes physiques) : Pour une métrique diagonale, $\hat{e}_i = e_i / \sqrt{g_{ii}}$ et $\hat{u}^i = \sqrt{g_{ii}} u^i$.

Procédure : Calculer trace, déterminant et adjoint métriques

Donnée : Un tenseur covariant T (matrice $[T]$) ou mixte L (matrice $[L]$), et la métrique $[g]$.

Étape 1 Inverser la métrique : calculer $[g]^{-1}$ (composantes contravariantes g^{ij}).

Étape 2 Pour un tenseur covariant T (type $(0, 2)$) :

- **Trace métrique :** $\text{tr}_g T = \text{Tr}([g]^{-1}[T]) = g^{ij}T_{ij}$ (la trace matricielle ordinaire $\text{Tr}([T])$ est fautive !).
- **Déterminant métrique :** $\det_g T = \frac{\det[T]}{\det[g]} = \det([g]^{-1}[T])$.

Étape 3 Pour un tenseur mixte L (type $(1, 1)$) :

- **Trace et déterminant directs :** $\text{tr } L = \text{Tr}([L])$ et $\det L = \det[L]$ (sans métrique).
- **Adjoint métrique :** $[L^\dagger] = [g]^{-1}[L]^T[g]$.
- **Décomposition :** $[\text{sym}_g L] = \frac{1}{2}([L] + [L^\dagger])$ et $[\text{skw}_g L] = \frac{1}{2}([L] - [L^\dagger])$.

Procédure : Calculer la divergence en coordonnées curvilignes

Donnée : Un champ vectoriel $u = u^i e_i$ et la métrique $[g]$ diagonale.

Étape 1 Identifier $\sqrt{\det[g]}$ à partir du tableau des métriques.

Étape 2 Former chaque terme $\sqrt{\det[g]} u^i$.

Étape 3 Dérivée par rapport à x^i et sommer.

Étape 4 Diviser par $\sqrt{\det[g]}$: $\text{div } u = \frac{1}{\sqrt{\det[g]}} \sum_i \partial_i (\sqrt{\det[g]} u^i)$.

Procédure : Calculer la longueur d'une courbe ou l'aire d'une surface

Donnée : Une courbe ou surface paramétrée dans un espace muni de $[g]$.

Étape 1 Construire la matrice A : dériver les coordonnées de l'espace par rapport aux paramètres.

Étape 2 Calculer la métrique induite : $[h] = A^T [g] A$.

Étape 3 Former l'élément de mesure : $dV_h = \sqrt{\det[h]} d\xi^1 \cdots d\xi^k$.

Étape 4 Intégrer sur le domaine des paramètres.

Exemple — Aire de la sphère de rayon R

Paramétrisation : $x = R \sin \theta \cos \varphi$, $y = R \sin \theta \sin \varphi$, $z = R \cos \theta$.

$$A = \begin{pmatrix} R \cos \theta \cos \varphi & -R \sin \theta \sin \varphi \\ R \cos \theta \sin \varphi & R \sin \theta \cos \varphi \\ -R \sin \theta & 0 \end{pmatrix}, \quad [h] = A^T I_3 A = \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}$$

$$dA_h = R^2 \sin \theta d\theta d\varphi, \quad \text{Aire} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi R^2 \sin \theta d\theta d\varphi = \boxed{4\pi R^2}$$

Procédure : Normale unitaire et calcul de flux avec métrique

Donnée : Une surface frontière définie implicitement par $\mathcal{S} = \{p \in \mathcal{M} \mid f(p) = 0\}$, un champ vectoriel u , et la métrique spatiale $[g]$.

Étape 1 Calculer la 1-forme différentielle normale : Dérivée f pour obtenir les composantes

de la 1-forme normale : $(df)_i = \partial_i f$.

Étape 2 Relever les indices pour obtenir le vecteur gradient :

$$(\text{grad } f)^i = g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^j}$$

Étape 3 Calculer la norme métrique du gradient :

$$\|\text{grad } f\|_g = \sqrt{g(\text{grad } f, \text{grad } f)} = \sqrt{g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial f}{\partial x^j}}$$

Étape 4 Construire le vecteur normal unitaire sortant n :

$$n = \pm \frac{\text{grad } f}{\|\text{grad } f\|_g}, \quad n^i = \pm \frac{g^{ij} \partial_j f}{\sqrt{g^{k\ell} \partial_k f \partial_\ell f}}$$

Règle de signe : Choisir le signe + si f est croissante vers l'extérieur du domaine, sinon −. Vérifier impérativement $g(n, n) = 1$.

Étape 5 Calculer la densité de flux scalaire $g(u, n)$:

$$g(u, n) = g_{ij} u^i n^j = \frac{u^i \partial_i f}{\|\text{grad } f\|_g}$$

Étape 6 Intégrer sur la frontière avec la métrique induite $[h]$:

$$\Phi = \int_S g(u, n) \, dA_h = \int_S g_{ij} u^i n^j \sqrt{\det[h]} \, d\xi^1 d\xi^2$$

Sanity check (Théorème de Gauss–Ostrogradski) : Si la surface est fermée $\mathcal{S} = \partial\Omega$, vérifier que $\Phi = \int_\Omega \text{div } u \, dV_g$.

Exemple — Vitesses et orthogonalité en polaires (APE 2)

Dans le plan euclidien, la métrique en coordonnées polaires (r, θ) est $[g]_{(r, \theta)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}$. Au point situé à $r = 2$ m, deux particules ont pour vitesses coordonnées respectives :

$$[u] = \begin{pmatrix} u^r \\ u^\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \text{ m/s} \\ 1 \text{ s}^{-1} \end{pmatrix}, \quad [v] = \begin{pmatrix} v^r \\ v^\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \text{ m/s} \\ -0,5 \text{ s}^{-1} \end{pmatrix}$$

1. Produit scalaire métrique et orthogonalité réelle :

Au point de mesure $r = 2$, la matrice métrique est $[g] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

$$g(u, v) = [u]^T [g] [v] = u^r v^r g_{rr} + u^\theta v^\theta g_{\theta\theta} = 1 \cdot 2 \cdot (1) + 1 \cdot (-0,5) \cdot (4) = 2 - 2 = 0 \text{ m}^2/\text{s}^2$$

Conclusion géométrique : Les trajectoires suivies par les deux particules sont **rigoureusement orthogonales** ($u \perp_g v$).

2. Normes scalaires physiques des vitesses :

$$\|u\|_g = \sqrt{g(u, u)} = \sqrt{(1)^2(1) + (1)^2(4)} = \sqrt{5} \text{ m/s} \approx 2,236 \text{ m/s}$$

$$\|v\|_g = \sqrt{g(v, v)} = \sqrt{(2)^2(1) + (-0,5)^2(4)} = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5} \text{ m/s}$$

Les deux particules avancent donc exactement à la même vitesse scalaire réelle.

3. Le piège d'examen mortel : la somme naïve des composantes coordonnées :

Si l'on calculait bêtement la somme $\sum_a u^a v^a = u^r v^r + u^\theta v^\theta = 1 \cdot 2 + 1 \cdot (-0,5) = 1,5 \neq 0$, on conclurait à tort que les vitesses ne sont pas perpendiculaires !

Attention — Piège dimensionnel majeur

$u^r v^r$ s'exprime en m^2/s^2 , tandis que $u^\theta v^\theta$ s'exprime en s^{-2} . Additionner directement des composantes coordonnées sans métrique constitue une **aberration physique et dimensionnelle**. C'est le coefficient métrique $g_{\theta\theta} = r^2$ (en m^2) qui rétablit l'homogénéité physique et révèle la véritable géométrie !

4. Base orthonormée et composantes physiques :

Avec $\hat{e}_r = e_r$ et $\hat{e}_\theta = \frac{1}{r}e_\theta$, les composantes physiques valent :

$$\hat{u}^r = u^r = 1 \text{ m/s}, \quad \hat{u}^\theta = r u^\theta = 2 \cdot 1 = 2 \text{ m/s} \implies \|\hat{u}\| = \sqrt{(\hat{u}^r)^2 + (\hat{u}^\theta)^2} = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5} \text{ m/s}$$

Exemple — Même différentielle, métriques différentes (APE 2)

Sur le plan (x, y) , on considère le champ scalaire de température $T(x, y) = T_0 + \kappa(x + 2y)$ ($\kappa > 0$). On compare deux métriques : la métrique euclidienne standard g ($[g] = I_2$) et une métrique anisotrope $\bar{g}$ ($[\bar{g}] = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$).

1. La différentielle dT est affine (indépendante de toute métrique) :

$$dT = \frac{\partial T}{\partial x} dx + \frac{\partial T}{\partial y} dy = \kappa dx + 2\kappa dy = \kappa(dx + 2dy) \implies [dT] = \begin{pmatrix} \kappa \\ 2\kappa \end{pmatrix}$$

Ce covecteur existe et est identique **sans qu'aucune métrique ne soit définie** sur l'espace !

2. Calcul des deux gradients :

Les inverses des tenseurs métriques valent $[g]^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $[\bar{g}]^{-1} = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Par la relation fondamentale $(\text{grad } T)^i = g^{ij} \partial_j T$:

- **Gradient euclidien** : $[\text{grad}_g T] = [g]^{-1}[dT] = \begin{pmatrix} \kappa \\ 2\kappa \end{pmatrix} \implies \text{grad}_g T = \kappa e_x + 2\kappa e_y$.
- **Gradient anisotrope** : $[\text{grad}_{\bar{g}} T] = [\bar{g}]^{-1}[dT] = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \kappa \\ 2\kappa \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \kappa/4 \\ 2\kappa \end{pmatrix} \implies \text{grad}_{\bar{g}} T = \frac{\kappa}{4} e_x + 2\kappa e_y$.

Les deux vecteurs gradients sont **distincts et non colinéaires** !

3. Test d'invariance sur le vecteur $v = e_x - e_y$ ($[v] = (1, -1)^T$) :

$$\begin{aligned} dT(v) &= \kappa(1) + 2\kappa(-1) = -\kappa \\ g(\text{grad}_g T, v) &= \kappa(1)(1) + 2\kappa(-1)(1) = -\kappa \\ \bar{g}(\text{grad}_{\bar{g}} T, v) &= \left(\frac{\kappa}{4}\right)(1)(4) + 2\kappa(-1)(1) = \kappa - 2\kappa = -\kappa \end{aligned}$$

L'action scalaire sur tout vecteur est rigoureusement identique car l'inverse de la métrique compense exactement la métrique.

4. Interprétation physique du basculement :

Pour $\bar{g}$, l'élément de longueur selon x est $ds_x = \sqrt{\bar{g}_{xx}} dx = 2 dx$. Avancer d'une unité de coordonnée $\Delta x = 1$ coûte **deux fois plus de distance réelle** que sous g . Le taux de variation spatial réel $\Delta T / \Delta s_x$ est divisé par deux, ce qui atténue la composante x du gradient et **redresse la direction de plus forte pente vers l'axe y** .

Exemple — Métrique induite : Câble 1D vs Membrane 2D (APE 2)**Partie A : Câble circulaire 1D dans le plan euclidien $\mathbb{R}^2$ ($[g] = I_2$)**

Paramétrisation : $\psi(\theta) = \begin{pmatrix} R \cos \theta \\ R \sin \theta \end{pmatrix}$ pour $\theta \in [0, 2\pi]$.

1. Matrice différentielle A (2×1) : $A = \frac{d\psi}{d\theta} = \begin{pmatrix} -R \sin \theta \\ R \cos \theta \end{pmatrix}$.
2. Métrique induite h (matrice 1×1) :

$$[h] = A^T [g] A = \begin{pmatrix} -R \sin \theta & R \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -R \sin \theta \\ R \cos \theta \end{pmatrix} = [R^2 \sin^2 \theta + R^2 \cos^2 \theta] = [R^2]$$

3. Élément de longueur et longueur totale :

$$ds = \sqrt{\det[h]} d\theta = \sqrt{R^2} d\theta = R d\theta \implies L = \int_0^{2\pi} R d\theta = \boxed{2\pi R}$$

Partie B : Membrane sphérique 2D dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ ($[g] = I_3$)

Paramétrisation : $\psi(\theta, \varphi) = (R \sin \theta \cos \varphi, R \sin \theta \sin \varphi, R \cos \theta)^T$.

1. Matrice différentielle A (3×2) : colonnes tangentes $a_\theta = \partial_\theta \psi$ et $a_\varphi = \partial_\varphi \psi$.
2. Métrique induite h (première forme fondamentale, 2×2) :

$$[h] = A^T I_3 A = \begin{pmatrix} a_\theta \cdot a_\theta & a_\theta \cdot a_\varphi \\ a_\varphi \cdot a_\theta & a_\varphi \cdot a_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}$$

3. Élément d'aire et aire totale :

$$dA_h = \sqrt{\det[h]} d\theta d\varphi = R^2 \sin \theta d\theta d\varphi, \quad \mathcal{A} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi R^2 \sin \theta d\theta = \boxed{4\pi R^2}$$

Exemple — Variances tensorielles et opérations métriques (APE 2)**1. Dilatation anélastique et divergence des trois matrices identité :**

Soit le changement d'échelle $x = 2\xi, y = \eta \implies A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Partant de $[g]_{(x,y)} = I_2$, $[I]_{(x,y)} = I_2$ et $[g^{-1}]_{(x,y)} = I_2$:

$$[g]_{(\xi,\eta)} = A^T [g] A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} I_2 \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{type } (0,2))$$

$$[I]_{(\xi,\eta)} = A^{-1} [I] A = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} I_2 \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2 \quad (\text{type } (1,1), \text{ invariant absolu !})$$

$$[g^{-1}]_{(\xi,\eta)} = A^{-1} [g^{-1}] A^{-T} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} I_2 \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{type } (2,0))$$

2. Calculs métriques réels (Entraînement maison APE 2) :

Soit $[g] = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \implies [g]^{-1} = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, et le tenseur covariant $[T] = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$:

— **Trace métrique** : $\text{tr}_g T = \text{Tr}([g]^{-1}[T]) = \text{Tr} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = 2 + 3 = \mathbf{5}$ (alors que la trace naïve $\text{Tr}([T]) = 11$ est fausse !).

— **Déterminant métrique** : $\det_g T = \frac{\det[T]}{\det[g]} = \frac{24}{4} = \mathbf{6}$.

Soit l'endomorphisme (tenseur mixte) $[L] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$:

— **Adjoint métrique :**

$$[L^\dagger] = [g]^{-1} [L]^T [g] = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

— **Partie symétrique métrique :** $[\text{sym}_g L] = \frac{1}{2}([L] + [L^\dagger]) = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

— **Partie antisymétrique métrique :** $[\text{skw}_g L] = \frac{1}{2}([L] - [L^\dagger]) = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$.

Exemple — L'ombre d'une sphère et gradient induit (APE 2)

Soit l'hémisphère supérieur S_R^+ paramétré comme un graphe au-dessus de son ombre équatoriale $D_R = \{x^2 + y^2 < R^2\}$ par $\psi(x, y) = (x, y, z(x, y))^T$ avec $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$.

1. Matrice A et métrique induite $[h]$ sur le disque ombre :

Les dérivées partielles sont $\partial_x z = -x/z$ et $\partial_y z = -y/z$. La jacobienne vaut $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -x/z & -y/z \end{pmatrix}$.

$$[h]_{(x,y)} = A^T I_3 A = \begin{pmatrix} 1 + \frac{x^2}{z^2} & \frac{xy}{z^2} \\ \frac{xy}{z^2} & 1 + \frac{y^2}{z^2} \end{pmatrix} = \frac{1}{R^2 - x^2 - y^2} \begin{pmatrix} R^2 - y^2 & xy \\ xy & R^2 - x^2 \end{pmatrix}$$

2. Inversion matricielle explicite :

Le déterminant métrique vaut $\det(h) = 1 + \frac{x^2+y^2}{z^2} = \frac{R^2}{z^2} = \frac{R^2}{R^2 - x^2 - y^2}$. L'inverse de la matrice 2×2 donne la relation remarquablement simple :

$$[h]_{(x,y)}^{-1} = \frac{1}{R^2} \begin{pmatrix} R^2 - x^2 & -xy \\ -xy & R^2 - y^2 \end{pmatrix} = I_2 - \frac{1}{R^2} \begin{pmatrix} x^2 & xy \\ xy & y^2 \end{pmatrix}$$

3. Différentielle et comparaison des gradients pour $f(x, y) = \left(1 - \frac{x^2+y^2}{R^2}\right)^6$:

La différentielle est purement affine : $df = -\frac{12}{R^2} \left(1 - \frac{x^2+y^2}{R^2}\right)^5 (x dx + y dy)$.

— **Gradient euclidien plat** ($[g] = I_2$) :

$$\text{grad}_g f = -\frac{12}{R^2} \left(1 - \frac{x^2+y^2}{R^2}\right)^5 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

— **Gradient riemannien induit** ($[h]^{-1}$) : En remarquant que $\begin{pmatrix} x^2 & xy \\ xy & y^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x^2 + y^2) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, on trouve immédiatement :

$$[h]^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \left(1 - \frac{x^2+y^2}{R^2}\right) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

D'où l'expression du gradient induit :

$$\boxed{\text{grad}_h f = \left(1 - \frac{x^2+y^2}{R^2}\right) \text{grad}_g f = \frac{z^2}{R^2} \text{grad}_g f = \cos^2 \alpha \text{grad}_g f}$$

Interprétation physique : α est l'angle d'inclinaison de la sphère par rapport à l'horizontale. Au centre ($x, y \rightarrow 0$), la calotte est horizontale ($z \approx R$), $h \approx g$, les gradients coïncident. Près du bord ($x^2 + y^2 \rightarrow R^2$), la sphère plonge à la verticale ($z \rightarrow 0$, $\alpha \rightarrow \pi/2$) : un petit déplacement sur l'ombre requiert une distance infiniment plus grande sur la sphère réelle ($ds_{\text{sphère}} \gg ds_{\text{ombre}}$). Le taux de variation spatial par mètre de sphère réelle s'éteint donc vers zéro ($\text{grad}_h f \rightarrow 0$).

Théorème — Bilan fondamental APE 2 : Fixé vs Variable

L'ensemble de la deuxième séance d'exercices se résume dans la grille conceptuelle suivante :

Situation	Ce qui reste fixé	Ce qui change / ce que l'on obtient
Exercice 1 (Changement de carte)	La métrique euclidienne g (mesure physique des longueurs)	Les coordonnées (cartésiennes $\rightarrow$ polaires); la matrice $[g]$ change mais les mesures de longueurs et d'angles restent identiques.
Exercice 2 (Deux métriques)	Les coordonnées (x, y) , le champ T et la 1-forme différentielle dT	La métrique ($g \rightarrow \bar{g}$); le vecteur gradient change de direction et d'amplitude ($\text{grad}_g T \neq \text{grad}_{\bar{g}} T$).
Exercice 3 (Métrique induite)	La métrique euclidienne ambiante de $\mathbb{R}^N$ ($[g] = I_N$)	La dimension de la variété; on induit une métrique h sur le câble 1D ($h = R^2$) ou sur la membrane 2D ($[h] = \text{diag}(R^2, R^2 \sin^2 \theta)$).
Exercice 4 (Variances)	L'espace vectoriel et la transformation de base A	Le type tensoriel $((0,2), (1,1), (2,0))$; des matrices initialement identiques évoluent selon des lois divergentes ($A^T M A$, $A^{-1} M A$, $A^{-1} M A^{-T}$).

Astuce — Formulaire rapide des opérateurs

Plan polaire (r, θ) , $\sqrt{\det[g]} = r$:

$$\begin{aligned}\text{grad } f &= \partial_r f e_r + \frac{1}{r^2} \partial_\theta f e_\theta, \\ \text{div } u &= \frac{1}{r} \partial_r (r u^r) + \partial_\theta u^\theta, \\ \Delta f &= \frac{1}{r} \partial_r (r \partial_r f) + \frac{1}{r^2} \partial_{\theta\theta} f.\end{aligned}$$

Cylindriques 3D (r, θ, z) , $\sqrt{\det[g]} = r$:

$$\begin{aligned}\text{grad } f &= \partial_r f e_r + \frac{1}{r^2} \partial_\theta f e_\theta + \partial_z f e_z, \\ \text{div } u &= \frac{1}{r} \partial_r (r u^r) + \partial_\theta u^\theta + \partial_z u^z, \\ \Delta f &= \frac{1}{r} \partial_r (r \partial_r f) + \frac{1}{r^2} \partial_{\theta\theta} f + \partial_{zz} f.\end{aligned}$$

Sphériques 3D (r, θ, φ) , $\sqrt{\det[g]} = r^2 \sin \theta$:

$$\begin{aligned}\text{grad } f &= \partial_r f e_r + \frac{1}{r^2} \partial_\theta f e_\theta + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \partial_\varphi f e_\varphi, \\ \text{div } u &= \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 u^r) + \frac{1}{\sin \theta} \partial_\theta (\sin \theta u^\theta) + \partial_\varphi u^\varphi, \\ \Delta f &= \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \partial_r f) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \partial_\theta (\sin \theta \partial_\theta f) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \partial_{\varphi\varphi} f.\end{aligned}$$

Surface sphérique (θ, φ) , $[g] = \text{diag}(R^2, R^2 \sin^2 \theta)$, $\sqrt{\det[g]} = R^2 \sin \theta$:

$$\begin{aligned}\text{grad } f &= \frac{1}{R^2} \partial_\theta f e_\theta + \frac{1}{R^2 \sin^2 \theta} \partial_\varphi f e_\varphi, \\ \text{div } u &= \frac{1}{\sin \theta} \partial_\theta (\sin \theta u^\theta) + \partial_\varphi u^\varphi, \\ \Delta f &= \frac{1}{R^2 \sin \theta} \partial_\theta (\sin \theta \partial_\theta f) + \frac{1}{R^2 \sin^2 \theta} \partial_{\varphi\varphi} f.\end{aligned}$$

Surface cylindrique (θ, z) , $[g] = \text{diag}(R^2, 1)$, $\sqrt{\det[g]} = R$ (métrique plate!) :

$$\text{grad } f = \frac{1}{R^2} \partial_\theta f e_\theta + \partial_z f e_z, \quad \text{div } u = \partial_\theta u^\theta + \partial_z u^z, \quad \Delta f = \frac{1}{R^2} \partial_{\theta\theta} f + \partial_{zz} f.$$

Attention — Piège : composantes coordonnées vs physiques

Les formules ci-dessus utilisent les **composantes coordonnées** u^i (base e_i). Si l'énoncé donne les composantes **physiques** $\hat{u}^i$ (base orthonormée $\hat{e}_i$), il faut d'abord convertir :

$$[u]_{\text{coord}} = H^{-1} [u]_{\text{orth}}, \quad H = \text{diag}(h_1, \dots, h_n).$$

En polaires : $u^r = \hat{u}^r$, mais $u^\theta = \hat{u}^\theta/r$ (et **pas** $\hat{u}^\theta$).

3 Du mouvement à la déformation

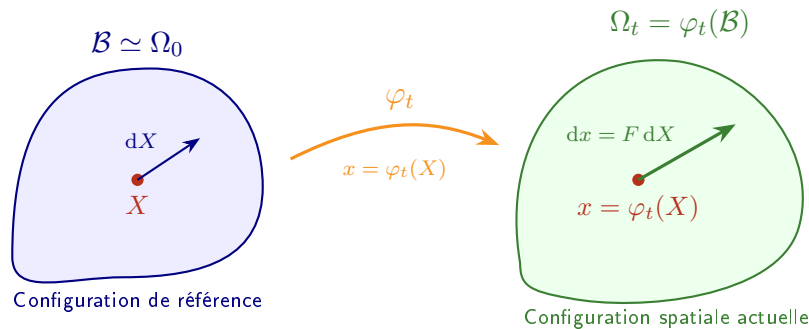
C'est le chapitre le plus lourd du cours et potentiellement le plus riche en questions d'examen. On utilise tous les outils géométriques construits aux chapitres 1 et 2 pour répondre à deux questions fondamentales : *comment décrire le mouvement d'un milieu continu ?* et *comment mesurer sa déformation locale ?* La clé de voûte est le **gradient de transformation** F , qui transforme les directions matérielles en directions spatiales, et les tenseurs qui en découlent : C, E, L, D, W .

3.1 Rappels théoriques

Définition — Corps matériel, espace physique et configuration

- $\mathcal{B}$: variété **matérielle** (les « étiquettes » des particules). $X \in \mathcal{B}$ est un point matériel.
- $\mathcal{M}$: **espace physique**. $x \in \mathcal{M}$ est une position spatiale.
- La **configuration** à l'instant t : $\varphi_t : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{M}$, $x = \varphi_t(X)$.
- Configuration de **référence** : $\varphi_0(X) = X$ (identification $\mathcal{B} \simeq \Omega_0$).

$$X \in \mathcal{B} \xrightarrow{\varphi_t} x = \varphi_t(X) \in \Omega_t \subset \mathcal{M}$$



Définition — Vitesse lagrangienne et vitesse eulérienne

- **Lagrangienne (matérielle)** : on suit l'historique d'une particule étiquetée $X \in \mathcal{B}$.

$$V(X, t) = \left. \frac{\partial \varphi_t(X)}{\partial t} \right|_X$$

Remarque conceptuelle clé (TP 3) : Bien qu'indexé par $X \in \mathcal{B}$, le vecteur vitesse $V(X, t)$ est un **vecteur spatial tangent** attaché à la position actuelle $x = \varphi_t(X)$. Il vit donc dans l'espace tangent spatial $T_{\varphi_t(X)}\mathcal{M}$.

- **Eulérienne (spatiale)** : on observe l'écoulement depuis une sonde fixe en position spatiale $x \in \mathcal{M}$:

$$v(x, t) = V(\varphi_t^{-1}(x), t)$$

Principe d'unicité physique : $V(X, t)$ et $v(x, t)$ représentent la **même vitesse physique réelle** du milieu ($v(x, t) = V(X, t)$ dès lors que $x = \varphi_t(X)$). Seul le choix des variables indépendantes change (tachymètre embarqué vs capteur fixe de laboratoire).

Définition — Dérivée matérielle d'un champ scalaire

$$\frac{Df}{Dt} = \left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_x + df_x(v) = \left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_x + v \cdot \text{grad } f$$

Le premier terme = variation temporelle locale à position x fixée. Le second = terme convectif (advection spatiale par le flux de matière).

Équivalence stricte (TP 3) : Pour tout champ lagrangien $\hat{f}(X, t) = f(\varphi_t(X), t)$, on vérifie toujours par dérivation en chaîne la compensation exacte de la dérive convective :

$$\left. \frac{\partial \hat{f}}{\partial t} \right|_X = \frac{Df}{Dt}$$

Attention géométrique : La contraction $df_x(v)$ est intrinsèque et définie **sans métrique**. L'écriture $v \cdot \text{grad } f$ est un raccourci eulérien calculé via g .

Définition — Accélération d'une particule

L'**accélération matérielle** est la dérivée temporelle particulière de la vitesse :

$$a(X, t) = \left. \frac{\partial V}{\partial t} \right|_X \iff a(x, t) = \frac{Dv}{Dt} = \left. \frac{\partial v}{\partial t} \right|_x + \nabla_v v$$

- $\partial v / \partial t|_x$: variation eulérienne locale de v (à position fixée).
- $\nabla_v v$: terme d'auto-convection (le fluide transporte sa propre vitesse).
- En coordonnées cartésiennes : $a^i = \partial v^i / \partial t + v^j \partial v^i / \partial x^j$.
- **En coordonnées curvilignes (§3.4, Éq. 3.31 du Syllabus) :**

$$a^i = \frac{\partial v^i}{\partial t} + v^j \nabla_j v^i = \frac{\partial v^i}{\partial t} + v^j \frac{\partial v^i}{\partial x^j} + \Gamma_{jk}^i v^j v^k$$

Le terme $\Gamma_{jk}^i v^j v^k$ rend compte des accélérations d'entraînement et de Coriolis induites par les repères tournants (ex : $-\dot{\theta}^2$ en polaires).

Définition — Gradient de transformation F

Le gradient de transformation est l'application linéaire **deux-points** :

$$F(X, t) : T_X \mathcal{B} \longrightarrow T_x \mathcal{M}, \quad F_I^i = \frac{\partial x^i}{\partial X^I}, \quad a = F A$$

- $A \in T_X \mathcal{B}$: direction matérielle élémentaire. $a = F A \in T_x \mathcal{M}$: direction spatiale correspondante.
- F est un **tenseur deux-points** : ses indices vivent dans deux espaces différents (i spatial, I matériel).
- Matrice $[F]$: n lignes (spatiales) $\times$ m colonnes (matérielles).

Théorème — Tenseurs de Cauchy–Green C et Green–Lagrange E

$$C(A, B) = g(FA, FB) = (F^* g)(A, B), \quad [C] = [F]^T [g] [F]$$

$$E = \frac{1}{2}(C - G), \quad [E] = \frac{1}{2}([F]^T [g] [F] - [G])$$

En cadre euclidien cartésien ($[G] = I$, $[g] = I$) : $[C] = [F]^T [F]$, $[E] = \frac{1}{2}([F]^T [F] - I)$.

Signification géométrique fondamentale (TP 3) :

- C rapatrie sur le corps de référence la métrique spatiale actuelle pour y mesurer les longueurs déformées : $\|FA\|_g^2 = C(A, A)$.
- E quantifie la **véritable altération géométrique** (variation du carré des longueurs) :

$$2E(A, A) = \|FA\|_g^2 - \|A\|_G^2$$

- Pour deux vecteurs orthogonaux initiaux $G(A, B) = 0$: $2E(A, B) = g(FA, FB)$.

L'analogie du ballon de baudruche :

- Dessinez au feutre un petit carré et deux flèches unitaires A, B sur un ballon de baudruche dégonflé (configuration matérielle initiale $\mathcal{B}$).
- Gonflez et tordez le ballon (configuration spatiale déformée Ω_t) : le carré devient un parallélogramme étiré.
- La matrice F transforme les flèches matérielles en flèches déformées : $a = FA, b = FB$.
- Le tenseur $C = F^T g F$ mesure la longueur réelle de la flèche déformée en restant assis dans son repère de repos : $\|FA\|_g^2 = C(A, A)$.
- Le tenseur $E = \frac{1}{2}(C - G)$ compare la longueur finale au carré avec la longueur initiale au carré. Si vous déplacez le ballon dans la pièce sans le gonfler ($F = R \neq I$), la flèche a tourné mais sa longueur n'a pas varié : $C = G \implies \mathbf{E} = \mathbf{0}$!
- **Conclusion clé** : E filtre rigoureusement tout mouvement global indéformable pour n'isoler que la **vraie distorsion de matière**.

Propriété — Rotation, Extension et Cisaillement (TP 3)

Dans un repère cartésien orthonormé ($[G] = I_2, [g] = I_2$) :

1. **Rotation rigide pure** ($R(\alpha)$) : $[F] = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \implies [C] = R^T R = I_2 \implies [E] = 0$.

Règle d'or : Un mouvement de corps rigide modifie F ($F \neq I$), mais ne produit **aucune déformation** ($E = 0$). Mouvement global $\neq$ Déformation intrinsèque !

2. **Extension uniaxiale** ($\lambda > 0$) : $x = \lambda X, y = Y \implies [F] = \text{diag}(\lambda, 1)$.

$$[C] = \text{diag}(\lambda^2, 1) \implies [E] = \text{diag}\left(\frac{\lambda^2 - 1}{2}, 0\right)$$

Pour $\lambda = 1 + \varepsilon$ ($\varepsilon \ll 1$), $E_{11} \approx \varepsilon$ (déformation d'ingénieur linéarisée).

3. **Cisaillement simple** ($\gamma \in \mathbb{R}$) : $x = X + \gamma Y, y = Y$.

$$[F] = \begin{pmatrix} 1 & \gamma \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \implies [C] = \begin{pmatrix} 1 & \gamma \\ \gamma & 1 + \gamma^2 \end{pmatrix} \implies [E] = \begin{pmatrix} 0 & \gamma/2 \\ \gamma/2 & \gamma^2/2 \end{pmatrix}$$

Piège d'examen critique (TP 3) : Noter impérativement que $E_{22} = \gamma^2/2 \neq 0$! La fibre matérielle initialement verticale E_Y bascule et s'allonge en $FE_Y = \gamma e_x + e_y$, de longueur $\|FE_Y\| = \sqrt{1 + \gamma^2} > 1$. Le terme $E_{12} = \gamma/2$ n'est pas un angle pur, car $\cos \Theta = \gamma / \sqrt{1 + \gamma^2} = \sin \psi$.

Propriété — Interprétation géométrique des composantes de E

Dans une **base matérielle orthonormée** ($[G] = I$), les composantes de E se lisent directement :

Composantes diagonales (changement de longueur) :

$$E_{II} = \frac{1}{2}(\ell_I^2 - 1) \implies \ell_I = \sqrt{1 + 2E_{II}}$$

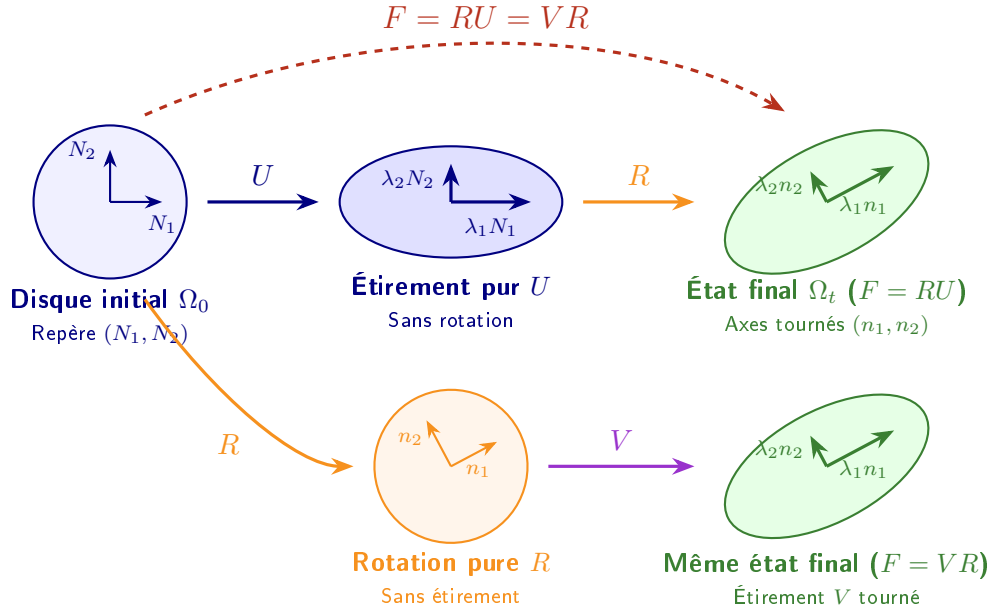
où ℓ_I est la longueur actuelle d'un vecteur initialement unitaire dans la direction I .

Composantes hors diagonale (changement d'angle, $I \neq J$) :

$$\cos \Theta_{IJ} = \frac{2E_{IJ}}{\ell_I \ell_J} = \frac{2E_{IJ}}{\sqrt{1 + 2E_{II}} \sqrt{1 + 2E_{JJ}}}$$

où Θ_{IJ} est l'angle **actuel** entre les directions initialement orthogonales E_I et E_J .

Règle : Les termes diagonaux et hors diagonaux doivent être lus **conjointement** pour déterminer le changement d'angle.



Théorème — Éléments de mesure et Jacobien J

Le jacobien local est défini de manière intrinsèque générale par le rapport des éléments de volume métriques (§3.10, Éq. 3.107 du Syllabus) :

$$J = \frac{dV_C}{dV_G} = \sqrt{\frac{\det[C]}{\det[G]}} = |\det[F]| \sqrt{\frac{\det[g]}{\det[G]}} \implies dv = J dV \quad (\text{ou } da = J dA)$$

En bases matérielle et spatiale orthonormées ($\det[G] = 1, \det[g] = 1$) avec orientation préservée :

$$J = \det[F].$$

Régimes de déformation volumique :

- $J > 1$: **Dilatation volumique** locale (expansion de la matière).
- $J < 1$: **Compression volumique** locale (contraction de la matière).
- $J = 1$: Transformation **isochore** (conservation exacte du volume ou de l'aire).

Taux de variation temporel (Relation d'Euler) :

$$\frac{\dot{J}}{J} = \operatorname{div} v = \operatorname{tr} L = \operatorname{tr} D$$

Un milieu est dit **incompressible** si $\operatorname{div} v = 0 \iff \dot{J} = 0 \iff J(t) = \text{cste} = 1$.

Formule de Nanson (surfaces, dim 3) — relie l'élément de surface actuel (n, da_g) à l'élément de référence (N, dA_G) :

$$n da_g = J F^{-\dagger} N dA_G$$

- n : normale g -unitaire actuelle ; N : normale G -unitaire de référence.
- $F^{-\dagger} := (F^\dagger)^{-1} = (F^{-1})^\dagger$: inverse de l'adjoint du gradient de transformation.
- En euclidien cartésien : $F^{-\dagger} = (F^T)^{-1} = (F^{-1})^T$.
- La normale est transportée par $F^{-\dagger}$, **jamais** par F directement !

Attention — Deux pièges fondamentaux sur le Jacobien J (TP 3)

1. **Conservation de l'aire/volume $\neq$ Absence de déformation ($J = 1 \not\Rightarrow E = 0$) :**
Si $\lambda = 2$ et $\mu = 1/2$, on a $J = \lambda\mu = 1$ (la surface est conservée), mais $[E] = \text{diag}(1.5, -0.375) \neq 0$! Le matériau a subi un allongement de 100% selon x et un écrasement de 50% selon y . Une déformation isochore altère profondément la forme sans changer le volume.
2. **Cas des sous-variétés (câble 1D ou membrane 2D dans $\mathbb{R}^3$) : $\det[F]$ n'existe pas !**
Pour un câble 1D déformé dans $\mathbb{R}^3$, $[F]$ est de taille 3×1 (rectangulaire). Le déterminant $\det[F]$ n'a aucun sens mathématique. En revanche, $[G] = [1]$ et $[C] = [\lambda^2]$ sont des scalaires 1×1 . La formule intrinsèque donne rigoureusement :

$$J = \sqrt{\frac{\det[C]}{\det[G]}} = \sqrt{\frac{\lambda^2}{1}} = \lambda \quad \Rightarrow \quad dl = \lambda dL$$

J quantifie l'allongement linéique dans la dimension propre de la sous-variété.

Définition — Gradient de vitesse L , Taux D et Spin W

Le **gradient spatial de vitesse** est $L = \nabla v$ (tenseur mixte spatial $(1,1)$).

Adjoint métrique $L^\dagger$: L'adjoint dépend fondamentalement de la métrique spatiale g :

$$g(Lu, w) = g(u, L^\dagger w) \iff [L^\dagger] = [g]^{-1}[L]^T[g]$$

Dans une base orthonormée ($[g] = I$), $[L^\dagger] = [L]^T$. En base non orthonormée, $[L^\dagger] \neq [L]^T$.

Décomposition canonique d'Euler–Cauchy :

$$L = D + W, \quad D = \frac{1}{2}(L + L^\dagger), \quad W = \frac{1}{2}(L - L^\dagger)$$

- $D = D^\dagger$: **tenseur de taux de déformation** (auto-adjoint pour g). Mesure les vitesses d'élongation et le taux de distorsion angulaire instantanés.
- $W = -W^\dagger$: **tenseur de spin / vorticité** (anti-adjoint pour g). Décrit la vitesse angulaire de rotation solide locale instantanée ($\text{tr } W = 0$).
- **Lien différentiel avec F :** $\frac{DF}{Dt} = LF \iff L = \dot{F}F^{-1}$.

Propriété — Les deux régimes limites instantanés (TP 3, Exercice 4)

Pour un écoulement 2D $v(x, y) = (ax - \omega y)e_x + (\omega x - ay)e_y$ en base orthonormée :

$$[L] = \begin{pmatrix} a & -\omega \\ \omega & -a \end{pmatrix} \Rightarrow [D] = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix}, \quad [W] = \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix}$$

- **Régime A : Vortex pur** ($a = 0, \omega \neq 0$) : $[D] = 0$, $[W] \neq 0$. Le taux de déformation est nul. Les particules tournent comme un solide indéformable à la vitesse angulaire ω . Aucune déformation locale.
- **Régime B :  longation pure** ($\omega = 0, a \neq 0$) : $[W] = 0$, $[D] \neq 0$. Aucune rotation locale. Le petit carré matériel s'étire selon x ($+a$) et se comprime selon y ($-a$).
- **Déformation active $\neq$ Changement de volume** : Dans les deux cas, $\text{div } v = \text{tr } L = a + (-a) = 0 \Rightarrow \dot{J} = 0$. Le volume est conservé même lorsque le milieu se déforme activement ($D \neq 0$).

Astuce — Miroir : Description Finie $\longleftrightarrow$ Instantanée (APE 3)

Notion cinématique	Description finie (grandes déformations)	Description instantanée (taux)
Transformation des directions	$F = \nabla_X \varphi_t$ (tenseur deux-points)	$L = \nabla_x v$ (tenseur mixte spatial)
Lien cinématique	$\dot{F} = LF \iff L = \dot{F}F^{-1}$	
Déformation intrinsèque	$C = F^*g, \quad E = \frac{1}{2}(C - G), \quad U = \sqrt{C}$	$D = \frac{1}{2}(L + L^\dagger)$ (auto-adjoint)
Rotation rigide locale	$R \in \text{SO}(n)$ (dans $F = RU = VR$)	$W = \frac{1}{2}(L - L^\dagger)$ (spin / vorticité)
�volution volumique	$J = \sqrt{\det C / \det G} = dv/dV$	$\frac{\dot{J}}{J} = \text{div } v = \text{tr } L = \text{tr } D$
Mouvement rigide sans déformation	$E = 0 \iff C = G \iff F = R$	$D = 0 \iff L = W$ (vortex solide pur)
Conservation de volume (isochore)	$J = 1$ ($\det C = \det G$)	$\text{div } v = \text{tr } D = 0$ (incompressible)

Définition — Déplacement et petites déformations (cadre euclidien)

Dans le cadre euclidien avec $\varphi_0(X) = X$:

$$u(X, t) = \varphi_t(X) - X, \quad F = I + \nabla_X u, \quad [H] := [\nabla_X u].$$

Le tenseur de Green-Lagrange exact est $[E] = \frac{1}{2}([H] + [H]^T + [H]^T[H])$.

Sous l'hypothèse des petites perturbations ($\|\nabla_X u\| \ll 1$) :

$$[\varepsilon] = \frac{1}{2}([\nabla_X u] + [\nabla_X u]^T) \approx [E], \quad \varepsilon_{IJ} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_I}{\partial X^J} + \frac{\partial u_J}{\partial X^I} \right)$$

Définition — Mesure expérimentale des déformations par CIN (Mecapix) – APE 4

La **Corrélation d'Images Numériques (CIN)** (*Digital Image Correlation, DIC*) permet de mesurer sans contact le champ continu de déplacement $\mathbf{u}(x, y)$ à la surface d'un solide déformé :

- **Principe optique** : Un mouchetis aléatoire contrasté (taches noires sur fond blanc) confère à chaque sous-zone une empreinte optique unique.
- **Conservation de la luminance** : L'intensité lumineuse d'une particule mati rielle en $P(x, y)$ déplacée en $P'(x + u_x, y + u_y)$ reste constante entre l'image de référence I_0 et l'image déformée I_t :

$$I_t(x + u_x(x, y), y + u_y(x, y)) \approx I_0(x, y)$$

- **Algorithme CIN** : Le logiciel (Mecapix) subdivise la zone d'intérêt en imagerie (sous-fenêtres carrées) centrées sur une grille de mesure et maximise le coefficient de corrélation croisée normalisée (ZNCC) pour déterminer le vecteur déplacement $\mathbf{u}$.

Propriété — Dépouillement des essais cinématiques modèles sur Mecapix : Compression et Cisaillement

  partir des champs de déplacement 2D mesurés par CIN sur éprouvette cubique de côté L , on déduit les composantes du tenseur linéarisé $\varepsilon = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T)$:

1. **Essai de compression uniaxiale** (selon l'axe vertical y) : Le bloc subit un tassement vertical ($u_y \approx -\alpha y$ avec $\alpha > 0$) et s'élargit latéralement ($u_x \approx +\beta x$ avec $\beta > 0$) :

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y} = -\alpha < 0, \quad \varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x} = +\beta > 0, \quad \varepsilon_{xy} = 0$$

Identification directe du coefficient de Poisson du matière :

$$\nu = -\frac{\varepsilon_{xx}}{\varepsilon_{yy}} = \frac{\beta}{\alpha}$$

Pour la mousse polyuréthane testée en APE 4 : $\nu \approx 0,30$ à $0,35$.

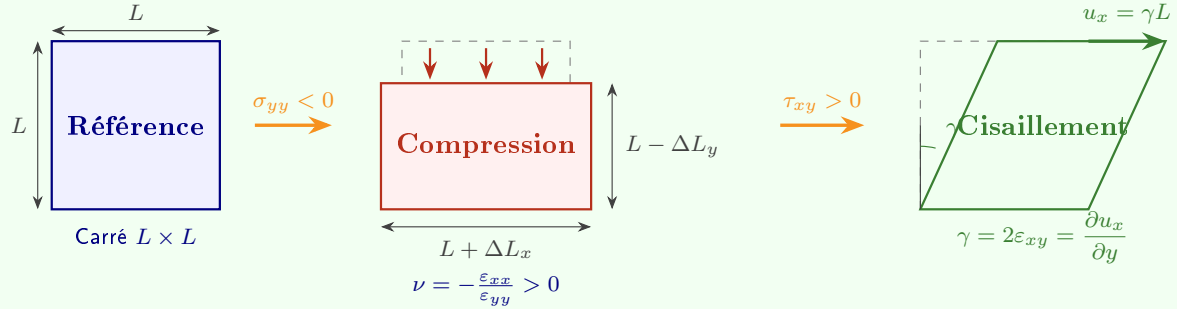
2. **Essai de cisaillement simple** (selon l'axe horizontal x) : La face supérieure est translatée

latéralement ($u_x \approx \gamma y$, $u_y \approx 0$) :

$$\varepsilon_{xx} = 0, \quad \varepsilon_{yy} = 0, \quad \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) = \frac{\gamma}{2}$$

La **distorsion angulaire** vaut $\gamma = 2\varepsilon_{xy}$.

3. **Distinction cinématique fondamentale (Examen)** : Le cisaillement simple ($u_x = \gamma y$, $u_y = 0$) combine de la déformation pure ($\varepsilon_{xy} = \gamma/2$) et une **rotation rigide locale non nulle** $\omega_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) = \gamma/2$ ($[W] \neq 0$). Dans le cisaillement pur, la rotation est rigoureusement nulle ($W = 0$).



Définition — Contrainte de Cauchy et traction

Le tenseur des contraintes de Cauchy $\sigma : T_x \mathcal{M} \rightarrow T_x \mathcal{M}$ est un tenseur mixte auto-adjoint ($\sigma^\dagger = \sigma$) tel que :

$$t(n) = \sigma n$$

La traction $t(n)$ est la force par unité d'aire sur une coupe de normale n .

Force résultante sur une surface Σ : $F_\Sigma = \int_\Sigma \sigma n \, da_g$.

Divergence (équilibre local) : $\int_{\partial\Omega_t} \sigma n \, da = \int_{\Omega_t} \text{div } \sigma \, dv$.

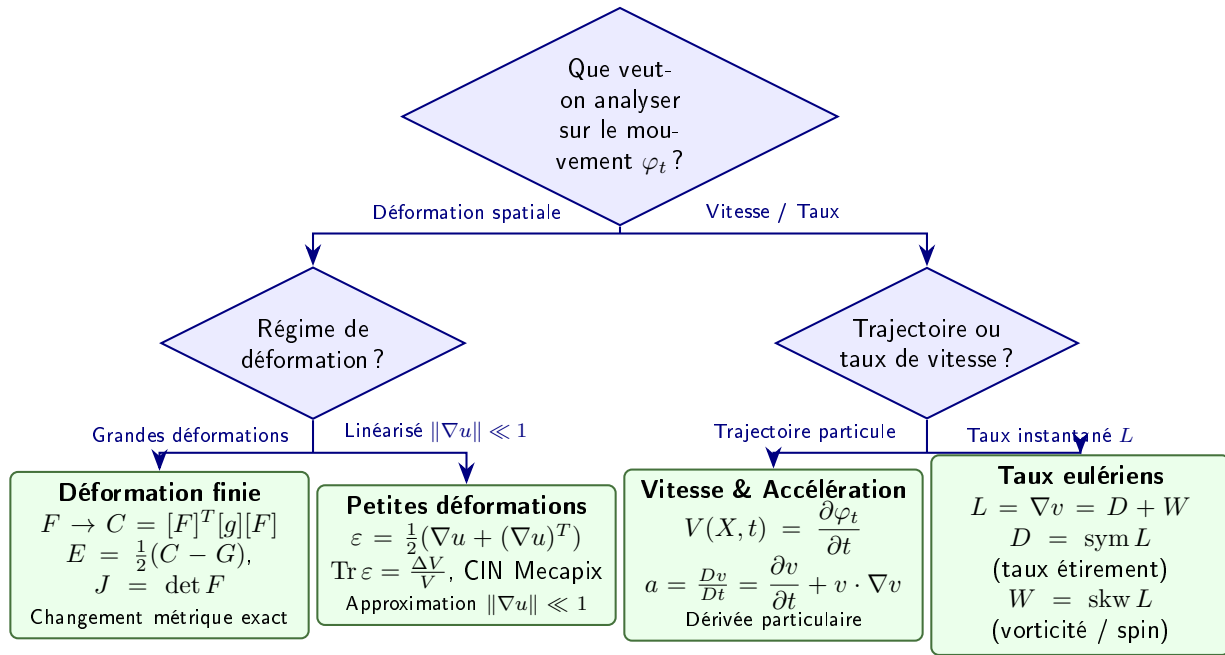
Propriété — Lien fondamental $\dot{F} = LF$ et $L = \dot{F}F^{-1}$

La dérivée matérielle du gradient de transformation vérifie :

$$\frac{DF}{Dt} = LF \quad \Longleftrightarrow \quad L = \dot{F}F^{-1}$$

- **Signification** : $D(FA)/Dt = L(FA)$ pour toute direction matérielle A fixée.
- En cartésiennes euclidiennes : $[L] = [\dot{F}][F]^{-1}$, puis $[D] = \frac{1}{2}([L] + [L]^T)$, $[W] = \frac{1}{2}([L] - [L]^T)$.
- Si le mouvement est connu en description lagrangienne $\varphi_t(X)$, on calcule F d'abord, puis L par cette formule.
- Si le champ de vitesse eulérien $v(x, t)$ est connu, $L = \nabla v$ directement (jacobienne de v).

3.2 Procédures de résolution

3.2.1 Arbre décisionnel : que calcule-t-on sur une transformation φ_t ?**Procédure : Passage Lagrangien $\longleftrightarrow$ Eulérien et dérivée matérielle**

Donnée : Le mouvement explicite $\mathbf{x} = \varphi_t(X)$ et/ou un champ physique scalaire $\hat{f}(X, t)$ ou spatial $f(x, t)$.

Étape 1 Inverser le mouvement spatial : Résoudre le système algébrique $x = \varphi_t(X)$ pour exprimer les coordonnées de référence matérielles en fonction des coordonnées spatiales actuelles :

$$X = \varphi_t^{-1}(x)$$

Condition : Possible localement si et seulement si $J = \det[F] \neq 0$.

Étape 2 Calculer les vitesses et accélérations matérielles (à X maintenu constant) :

$$V(X, t) = \left. \frac{\partial \varphi_t(X)}{\partial t} \right|_X, \quad a(X, t) = \left. \frac{\partial V(X, t)}{\partial t} \right|_X$$

Espace : V et a vivent dans l'espace tangent spatial $T_{\varphi_t(X)}\mathcal{M}$.

Étape 3 Dédire le champ de vitesse eulérien $v(x, t)$ (à position x fixée) : Substituer X par son expression inverse $\varphi_t^{-1}(x)$:

$$v(x, t) = V(\varphi_t^{-1}(x), t)$$

Étape 4 Calculer la dérivée matérielle (particulaire) d'un champ :

- **En variables matérielles :** $\frac{Df}{Dt} = \left. \frac{\partial \hat{f}(X, t)}{\partial t} \right|_X$ (dérivation partielle directe).
- **En variables eulériennes :** $\frac{Df}{Dt} = \left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_x + df(v) = \left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_x + v \cdot \text{grad } f$.

Étape 5 Sanity check (compensation convective) : Vérifier que le terme de transport convectif $df(v)$ compense rigoureusement la dérive spatiale locale afin de retrouver exactement la dérivée matérielle :

$$\frac{Df}{Dt} = \left. \frac{\partial \hat{f}}{\partial t} \right|_X$$

Procédure : Calculer les tenseurs de déformation C et E

Donnée : Une transformation spatiale $\mathbf{x} = \varphi_t(X)$, les métriques $[G]$ (matérielle) et $[g]$ (spatiale).

Étape 1 Calculer le gradient de déformation $[F]$: $F_I^i = \frac{\partial x^i}{\partial X^I}$ (lignes spatiales, colonnes matérielles).

Étape 2 Calculer le tenseur de Cauchy–Green droit $[C]$: $[C] = [F]^T [g] [F]$. En repère cartésien euclidien ($[g] = I$), $[C] = [F]^T [F]$.

Étape 3 Calculer le tenseur de Green–Lagrange $[E]$: $[E] = \frac{1}{2}([C] - [G])$. En repère cartésien euclidien ($[G] = I$), $[E] = \frac{1}{2}([F]^T [F] - I)$.

Étape 4 Calculer le Jacobien de changement de mesure J :

$$J = \sqrt{\frac{\det[C]}{\det[G]}} \quad (J = \det[F] \text{ si } \dim \mathcal{B} = \dim \mathcal{M} \text{ en cartésiennes})$$

Règle pour sous-variétés (câble 1D, membrane 2D) : $[F]$ est rectangulaire, $\det[F]$ n'existe pas ! Utiliser impérativement la formule par les déterminants des métriques $\sqrt{\det[C]/\det[G]}$.

Étape 5 Sanity checks immédiats :

- Translation ou rotation rigide $\implies [C] = [G] \implies [E] = 0$.
- $J > 0$ (pas de retournement de matière).
- Si $J = 1$, la déformation est isochore mais E peut être non nul !

Procédure : Calculer la décomposition polaire $F = RU = VR$

Donnée : Le gradient de transformation $[F]$ (avec $\det[F] > 0$).

Étape 1 Calculer la métrique de Cauchy–Green $[C]$: $[C] = [F]^T [F]$. *Remarque :* La rotation R s'élimine automatiquement car $R^T R = I$.

Étape 2 Extraire le tenseur d'étirement droit $[U] = \sqrt{[C]}$:

- Si $[C]$ est diagonale $\text{diag}(\lambda_1^2, \dots, \lambda_n^2)$, alors $[U] = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ avec $\lambda_i > 0$.
- Si $[C]$ n'est pas diagonale, diagonaliser $[C] = P D P^T$ avec $D = \text{diag}(\lambda_i^2)$, puis poser $[U] = P \sqrt{D} P^T$.

Étape 3 Calculer la rotation rigide $[R]$:

$$[R] = [F] [U]^{-1}$$

Vérification d'isométrie : Vérifier que $[R]^T [R] = I$ et $\det[R] = +1$ ($R \in \text{SO}(n)$).

Étape 4 Calculer l'étirement spatial gauche $[V]$:

$$[V] = [R] [U] [R]^T = \sqrt{[F][F]^T}$$

Étape 5 Interprétation physique de la chronologie :

- $F = RU$: d'abord étirement matériel pur U le long des directions propres dans $\mathcal{B}$, puis rotation spatiale rigide R sans déformation vers $\mathcal{M}$.
- $F = VR$: d'abord rotation spatiale rigide R , puis étirement spatial pur V dans $\mathcal{M}$.

Astuce — Raccourci express 2D : Calcul de $U = \sqrt{C}$

En dimension 2, diagonaliser $[C]$ (recherche des valeurs propres, calcul des vecteurs propres orthonormés, matrice de passage P , double produit matriciel) est la cause de 80% des erreurs et des pertes de temps à l'examen.

Grâce au théorème de Cayley–Hamilton, la racine carrée symétrique définie positive $U = \sqrt{C}$ d'une matrice 2×2 s'obtient **instantanément par ses invariants scalaires** :

$$U = \frac{1}{\sqrt{I_1 + 2\sqrt{I_2}}} \left(C + \sqrt{I_2} I_2 \right)$$

où les deux invariants valent simplement :

$$I_1 = \text{tr}(C) = C_{11} + C_{22}, \quad I_2 = \det(C) = C_{11}C_{22} - C_{12}^2.$$

Algorithme express d'examen (plié en 3 lignes) :

a. Calculer la trace I_1 et le déterminant I_2 de la matrice $[C]$.

b. Écrire $[U] = \frac{1}{\sqrt{I_1 + 2\sqrt{I_2}}} \left(\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{12} & C_{22} \end{pmatrix} + \sqrt{I_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$.

c. Inverser la matrice 2×2 : $[U]^{-1} = \frac{1}{\sqrt{I_2}} \begin{pmatrix} U_{22} & -U_{12} \\ -U_{12} & U_{11} \end{pmatrix}$ et en déduire la rotation $[R] = [F][U]^{-1}$.

Gain de temps garanti : 15 minutes économisées le jour J et zéro risque d'erreur de signe sur les vecteurs propres !

Procédure : Calculer L , D , W et l'évolution du volume

Donnée : Le champ de vitesse eulérien $v(x, t)$ et la métrique spatiale $[g]$.

Étape 1 Former la matrice du gradient spatial de vitesse $[L]$: $L_j^i = \frac{\partial v^i}{\partial x^j}$ (dérivées spatiales de chaque composante).

Étape 2 Calculer l'adjoint métrique $[L^\dagger]$:

$$[L^\dagger] = [g]^{-1}[L]^T[g] \quad ([L^\dagger] = [L]^T \text{ si base orthonormée } [g] = I)$$

Étape 3 Décomposer en taux de déformation $[D]$ et spin $[W]$:

$$[D] = \frac{1}{2} ([L] + [L^\dagger]) \quad (\text{symétrique}), \quad [W] = \frac{1}{2} ([L] - [L^\dagger]) \quad (\text{antisymétrique})$$

Étape 4 Calculer le taux d'évolution de volume (Relation d'Euler) :

$$\text{div } v = \text{tr}[L] = \text{tr}[D] = \frac{\dot{J}}{J}$$

Étape 5 Sanity checks instantanés : $\text{tr}[W] = 0$ toujours. $\text{div } v = 0 \iff$ volume instantanément conservé ($\dot{J} = 0$).

Exemple — Étirement homogène d'un disque

Configuration : $x^1 = (1 + a)X^1$, $x^2 = (1 + b)X^2$ avec $a = a(t)$, $b = b(t) \geq 0$.

Résolution :

$$- [F] = \begin{pmatrix} 1+a & 0 \\ 0 & 1+b \end{pmatrix}, \quad [C] = [F]^T[F] = \begin{pmatrix} (1+a)^2 & 0 \\ 0 & (1+b)^2 \end{pmatrix}.$$

- $[E] = \begin{pmatrix} a + a^2/2 & 0 \\ 0 & b + b^2/2 \end{pmatrix}$, $J = (1+a)(1+b)$.
- Vitesse eulérienne : $v = \frac{\dot{a}}{1+a} x^1 e_1 + \frac{\dot{b}}{1+b} x^2 e_2$.
- $[L] = \text{diag}\left(\frac{\dot{a}}{1+a}, \frac{\dot{b}}{1+b}\right) = [D]$, $[W] = 0$.

$$\boxed{\text{div } v = \frac{\dot{a}}{1+a} + \frac{\dot{b}}{1+b} = \frac{\dot{J}}{J}}$$

Exemple — Trajectoire, cisaillement et convection thermique (TP 3)

Dans $\mathbb{R}^2$ euclidien ($[G] = I_2, [g] = I_2$, coordonnées cartésiennes contravariantes x^i et X^I), on considère la cinématique :

$$x^1 = \lambda(t)X^1, \quad x^2 = X^2 + \gamma(t)X^1 \quad (\lambda(t) > 0)$$

et le champ de température matériel $\hat{T}(X, t) = T_0 + \alpha X^1 + \beta t$.

Résolution pas-à-pas conforme aux procédures :

1. **Inversion** $X = \varphi_t^{-1}(x) : X^1 = \frac{x^1}{\lambda(t)}$ et $X^2 = x^2 - \frac{\gamma(t)}{\lambda(t)}x^1$.

2. **Vitesses lagrangienne et eulérienne** : $V(X, t) = \dot{\lambda}X^1e_1 + \dot{\gamma}X^1e_2 \implies v(x, t) = \frac{\dot{\lambda}(t)}{\lambda(t)}x^1e_1 + \frac{\dot{\gamma}(t)}{\lambda(t)}x^1e_2$.

3. **Dérivée matérielle de température** : $T(x, t) = T_0 + \alpha \frac{x^1}{\lambda(t)} + \beta t$.

$$\left. \frac{\partial T}{\partial t} \right|_x = -\alpha x^1 \frac{\dot{\lambda}}{\lambda^2} + \beta, \quad dT(v) = \frac{\partial T}{\partial x^1} v^1 = \frac{\alpha}{\lambda} \left(\frac{\dot{\lambda}}{\lambda} x^1 \right) = \alpha x^1 \frac{\dot{\lambda}}{\lambda^2}$$

$$\text{Somme : } \frac{DT}{Dt} = \left(-\alpha x^1 \frac{\dot{\lambda}}{\lambda^2} + \beta \right) + \alpha x^1 \frac{\dot{\lambda}}{\lambda^2} = \beta = \left. \frac{\partial \hat{T}}{\partial t} \right|_X. \checkmark$$

4. **Tenseurs de déformation et Jacobien** :

$$[F] = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ \gamma & 1 \end{pmatrix}, \quad [C] = [F]^T[F] = \begin{pmatrix} \lambda^2 + \gamma^2 & \gamma \\ \gamma & 1 \end{pmatrix}, \quad J = \det[F] = \lambda$$

$$[E] = \frac{1}{2}([C] - I_2) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \lambda^2 + \gamma^2 - 1 & \gamma \\ \gamma & 0 \end{pmatrix}$$

5. **Gradient spatial de vitesse et relation d'Euler** :

$$[L] = [\nabla v] = \begin{pmatrix} \dot{\lambda}/\lambda & 0 \\ \dot{\gamma}/\lambda & 0 \end{pmatrix} \implies \text{div } v = \text{tr}[L] = \frac{\dot{\lambda}}{\lambda} = \frac{\dot{J}}{J} \quad \checkmark$$

$$[D] = \begin{pmatrix} \dot{\lambda}/\lambda & \dot{\gamma}/(2\lambda) \\ \dot{\gamma}/(2\lambda) & 0 \end{pmatrix} \text{ et } [W] = \begin{pmatrix} 0 & -\dot{\gamma}/(2\lambda) \\ \dot{\gamma}/(2\lambda) & 0 \end{pmatrix}.$$

Procédure : Analyse et dépouillement d'un essai mécanique par CIN (Mecapix)

Donnée : Deux images expérimentales d'un échantillon moucheté (état de référence I_0 et état chargé I_t), la taille L de l'éprouvette et les conditions aux limites appliquées (faces fixes, déplace-

ment imposé).

Étape 1 Extraction du champ de déplacement vectoriel $\mathbf{u}(x, y)$: Le logiciel de CIN (Mecapix) fournit les composantes $(u_x(x, y), u_y(x, y))$ aux nœuds d'une grille de mesure régulière.

Étape 2 Filtrage et gradient de déplacement $[\nabla \mathbf{u}]$: Par différences finies locales ou lissage polynomial des cartes de déplacement :

$$[\nabla \mathbf{u}] = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{\partial u_x}{\partial y} \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} & \frac{\partial u_y}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Étape 3 Calcul du tenseur linéarisé des petites déformations $[\varepsilon]$:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y}, \quad \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right)$$

Étape 4 Extraction des constantes mécaniques du matériau :

- *En compression/traction pure* : vérifier $\varepsilon_{xy} \approx 0$ et extraire $\nu = -\frac{\varepsilon_{\text{transverse}}}{\varepsilon_{\text{axial}}}$.
- *En cisaillement simple* : vérifier $\varepsilon_{xx} \approx \varepsilon_{yy} \approx 0$ et mesurer la distorsion $\gamma = 2\varepsilon_{xy}$.

Étape 5 Test de validité de l'approximation des petites perturbations (HPP) : Calculer l'écart quadratique par rapport au tenseur de Green-Lagrange exact :

$$[E] - [\varepsilon] = \frac{1}{2} [\nabla \mathbf{u}]^T [\nabla \mathbf{u}]$$

L'hypothèse des petites déformations est rigoureusement valide si $\|\nabla \mathbf{u}\|^2 \ll \|\nabla \mathbf{u}\|$ (généralement vérifié pour $\|\varepsilon\| < 5\%$).

Exemple — Essai de compression d'un cube de mousse sur Mecapix (APE 4)

Un bloc cubique en mousse polyuréthane de côté $L = 50$ mm est comprimé verticalement selon y d'une hauteur imposée $\Delta L_y = 1,5$ mm sur sa face supérieure, tandis que sa base inférieure $y = 0$ repose sur un support plan lubrifié. L'analyse par CIN sur Mecapix donne le champ de déplacement 2D homogène au centre de la zone mouchetée :

$$u_x(x, y) = +0,010 x, \quad u_y(x, y) = -0,030 y \quad (\text{coordonnées en millimètres})$$

1. Calcul des composantes de déformation :

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x} = +0,010 = +1,0\%, \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y} = -0,030 = -3,0\%, \quad \varepsilon_{xy} = 0$$

2. Identification du coefficient de Poisson ν :

$$\nu = -\frac{\varepsilon_{xx}}{\varepsilon_{yy}} = -\frac{+0,010}{-0,030} = \frac{1}{3} \approx 0,333$$

Interprétation physique : Le matériau est compressible et présente un coefficient de Poisson typique des polymères cellulaires et mousses polymères.

3. Test de validité de l'approximation linéaire (HPP) : Le gradient de déplacement vaut $[\nabla \mathbf{u}] = \begin{pmatrix} 0,010 & 0 \\ 0 & -0,030 \end{pmatrix}$. Le tenseur exact de Green-Lagrange donne :

$$E_{xx} = 0,010 + \frac{1}{2}(0,010)^2 = 0,01005, \quad E_{yy} = -0,030 + \frac{1}{2}(-0,030)^2 = -0,02955$$

L'erreur relative entre ε et E est de $\frac{|0,01005-0,010|}{0,010} \approx 0,5\%$, ce qui justifie parfaitement l'utilisation du tenseur infinitésimal ε .

Attention — Pièges classiques du chapitre 3 (issus du TP 3 et TP 4)

- **Piège de la CIN et du cisaillement simple** : En cisaillement simple ($u_x = \gamma y$), la distorsion angulaire vaut $\gamma = 2\varepsilon_{xy}$, et non ε_{xy} ! De plus, le cisaillement simple s'accompagne toujours d'une **rotation de corps rigide non nulle** $\omega_{xy} = \gamma/2$.
- **Piège du signe de ν** : Le coefficient de Poisson est défini avec un signe négatif $\nu = -\varepsilon_{\text{trans}}/\varepsilon_{\text{axial}}$ pour être **strictement positif** pour les matériaux usuels ($\nu > 0$).
- **Piège $J = 1 \not\Rightarrow E = 0$** : Un matériau incompressible subit une conservation d'aire/volume ($J = 1$), mais peut être fortement étiré ou cisailé ($E \neq 0$). Ne confondez jamais conservation de volume et indéformabilité !
- **Piège du cisaillement simple** : Pour $x = X + \gamma Y, y = Y$, la composante $E_{22} = \gamma^2/2 \neq 0$ car la fibre oblique s'étire en $\sqrt{1 + \gamma^2}$. Seule l'approximation linéaire des petites perturbations donne $\varepsilon_{22} = 0$.
- **Piège des sous-variétés** : Pour un câble 1D dans $\mathbb{R}^3$, la matrice $[F]$ est de taille 3×1 : son déterminant n'existe pas ! Le changement de longueur linéique se calcule obligatoirement par $J = \sqrt{\det[C]/\det[G]} = \lambda$.
- **Piège de l'adjoint** : $[L]^T$ n'est égal à l'adjoint $L^\dagger$ que si la base spatiale est **orthonormée**. En coordonnées quelconques, calculer impérativement $[L^\dagger] = [g]^{-1}[L]^T[g]$.
- Ne pas confondre $\nabla_X u$ (gradient **matériel** du déplacement) et $\nabla_x v = L$ (gradient **spatial** de la vitesse).
- $[C] = [F]^T[F]$ n'est valable qu'en euclidien cartésien. En général : $[C] = [F]^T[g][F]$.

Astuce — Vérification rapide de F, C, E et J

- **Translation** $\varphi_t(X) = X + c(t)$: $F = I, C = G, E = 0, J = 1, L = 0$. ✓
- **Rotation rigide** : $F = R$ ($R^T R = I$) $\implies C = I, E = 0, J = 1, D = 0, W \neq 0$. ✓
- **Extension uniaxiale** de rapport λ : $E_{11} = \frac{1}{2}(\lambda^2 - 1)$. Pour $\lambda = 1 + \eta$ petit : $E_{11} \approx \eta$.
- **Dimension de $[F]$** : (lignes spatiales n) $\times$ (colonnes matérielles m). Vérifier que $[C] = [F]^T[g][F]$ est toujours carrée $m \times m$ (espace matériel).
- **Invariance de trace** : $\text{div } v = \text{tr } L = \text{tr } D = \dot{J}/J$. Si $\text{tr } D \neq \text{div } v$, il y a une faute de calcul !

4 Dynamique, bilans universels et lois de comportement

Ce chapitre constitue l'aboutissement de la mécanique des milieux continus : relier la cinématique et la géométrie des déformations aux **efforts intérieurs** et aux **lois physiques fondamentales** de la nature. On y apprend à manipuler le **tenseur des contraintes de Cauchy** σ , à dériver sous le signe intégral grâce au **théorème de transport de Reynolds**, et à formuler les bilans universels locaux (masse, quantité de mouvement, moment cinétique). Enfin, on ferme le système d'équations grâce aux **lois de comportement** : l'élasticité linéaire de Hooke pour les solides et la loi de Navier–Stokes pour les fluides visqueux.

4.1 Rappels théoriques

Définition — Vecteur contrainte et Tenseur de Cauchy σ

Soit un milieu continu en mouvement occupant le domaine spatial Ω_t . Pour toute coupe fictive passant par $x \in \Omega_t$ et orientée par la normale unitaire sortante n ($\|n\|_g = 1$) :

- Le **vecteur contrainte (ou traction)** $t(n)$ représente la force surfacique exercée par la matière extérieure sur la matière intérieure à travers la facette :

$$t(n) = \lim_{\Delta a \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta a} \in T_x \mathcal{M}$$

- **Théorème du tétraèdre de Cauchy** : L'équilibre des forces sur un tétraèdre infinitésimal démontre que la dépendance en n est strictement linéaire. Il existe un unique tenseur spatial d'ordre deux, le **tenseur des contraintes de Cauchy** σ , tel que :

$$t(n) = \sigma n, \quad t^i = \sigma^i_j n^j$$

Décomposition normale et tangentielle (Cission) :

- **Contrainte normale** σ_n (traction si > 0 , compression si < 0) :

$$\sigma_n = g(n, t(n)) = n \cdot (\sigma n) = \sigma_{ij} n^i n^j$$

- **Vecteur contrainte tangentielle (de cisaillement)** t_τ :

$$t_\tau = t(n) - \sigma_n n$$

- **Cission scalaire (intensité du cisaillement)** τ :

$$\tau = \|t_\tau\|_g = \sqrt{\|t(n)\|_g^2 - \sigma_n^2}$$

Définition — Contraintes principales, directions principales et invariants scalaires

Le tenseur des contraintes de Cauchy σ étant auto-adjoint ($\sigma^\dagger = \sigma$), le **théorème spectral** garantit l'existence d'une base orthonormée de vecteurs propres ($\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3$) associés à des valeurs propres réelles :

$$\sigma \mathbf{n}_I = \sigma_I \mathbf{n}_I, \quad \det(\sigma - \lambda I) = 0$$

- **Contraintes principales** : Les valeurs propres ordonnées par convention décroissante :

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$$

- **Directions principales** : Les vecteurs propres unitaires orthonormés $\mathbf{n}_I$.

- **Facettes sans cisaillement** : Sur toute facette orientée selon une direction principale $\mathbf{n}_I$, le vecteur de traction est purement normal :

$$t(\mathbf{n}_I) = \sigma \mathbf{n}_I = \sigma_I \mathbf{n}_I \implies \sigma_n = \sigma_I \quad \text{et} \quad \tau = 0$$

Réciproquement : Une facette ne subit **aucun cisaillement** ($\tau = 0$) si et seulement si sa normale est une direction principale !

- **Invariants scalaires fondamentaux (indépendants du repère)** :

$$I_1 = \text{tr}(\sigma) = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3, \quad I_2 = \frac{1}{2} ((\text{tr} \sigma)^2 - \text{tr}(\sigma^2)), \quad I_3 = \det(\sigma) = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3$$

Définition — Décomposition sphérique-déviatoire d'un tenseur de contraintes (APE 5)

Tout tenseur des contraintes se décompose de manière unique en une partie sphérique (hydrostatique) et une partie déviatoire :

$$\sigma = \sigma_m I_3 + \sigma_d \quad \text{avec} \quad \sigma_m = \frac{1}{3} \text{tr}(\sigma) = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} \quad \text{et} \quad \text{tr}(\sigma_d) = 0$$

- **Partie sphérique (hydrostatique)** $\sigma_m I_3 = -p I_3$: Représente la **pression hydrostatique moyenne** $p = -\sigma_m$. Elle est responsable des **variations de volume** de la matière sans distorsion de forme.
- **Partie déviatoire (Déviateur des contraintes)** σ_d : Tenseur de trace rigoureusement nulle ($\text{tr} \sigma_d = 0$). Il est responsable des **distorsions angulaires**, du cisaillement et de l'écoulement plastique.
- **Propriété spectrale majeure (Échauffement APE 5)** : σ et σ_d commutent et possèdent **exactement les mêmes directions principales** $\mathbf{n}_I$. Leurs valeurs propres sont simplement translatées :

$$\lambda_I(\sigma_d) = \sigma_I - \sigma_m$$

Théorème — Cercles de Mohr (2D et 3D) et cisaillement maximal absolu (APE 5)

Pour toute normale unitaire $\mathbf{n} = n_1 \mathbf{n}_1 + n_2 \mathbf{n}_2 + n_3 \mathbf{n}_3$ ($n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$), le couple (σ_n, τ) vérifie les équations des cercles de Mohr :

- **Le tricerclle de Mohr** : Dans le plan (σ_n, τ) , les couples possibles pour toutes les facettes de l'espace sont confinés dans la **zone admissible délimitée par trois cercles** construits sur les diamètres $[\sigma_3, \sigma_2]$, $[\sigma_2, \sigma_1]$ et $[\sigma_3, \sigma_1]$.
- **Contrainte normale maximale et minimale** :

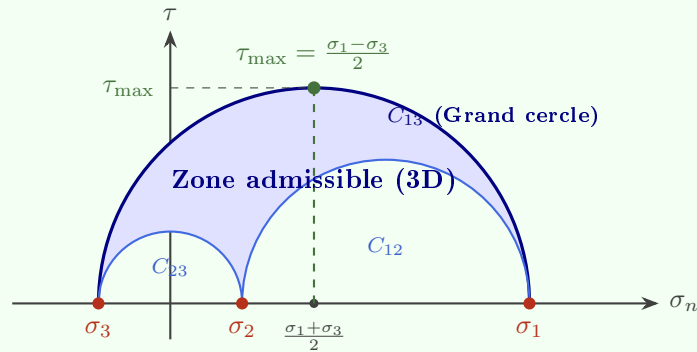
$$\max \sigma_n = \sigma_1 \quad (\text{sur facette } \mathbf{n}_1), \quad \min \sigma_n = \sigma_3 \quad (\text{sur facette } \mathbf{n}_3)$$

- **Cisaillement maximal absolu (Cission maximale)** :

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$$

Ce cisaillement maximal est atteint sur les facettes orientées à 45° (**bissectrices**) entre les axes principaux 1 et 3 :

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{n}_1 \pm \mathbf{n}_3), \quad \text{avec contrainte normale associée} \quad \sigma_n = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}$$



Propriété — Critères de résistance et modes de rupture mécanique : Tresca vs Rankine (APE 5)

Le choix du critère de rupture ou de dimensionnement dépend fondamentalement de la nature fragile ou ductile du matériau :

1. **Matériaux ductiles (Acier, aluminium, métaux) $\Rightarrow$ Critère de Tresca (Cisaillement maximal) :** L'écoulement plastique s'amorce lorsque le cisaillement maximal atteint la limite d'élasticité au cisaillement τ_y :

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \geq \tau_y = \frac{\sigma_y}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad \sigma_1 - \sigma_3 \geq \sigma_y$$

Orientation du glissement : Les bandes de glissement plastique se forment toujours à 45° des directions principales 1 et 3.

2. **Matériaux fragiles (Craie, fonte, verre, béton) $\Rightarrow$ Critère de Rankine (Traction normale maximale) :** La rupture par décohesion brutale survient lorsque la plus grande contrainte principale de traction atteint la contrainte de rupture σ_R :

$$\sigma_1 \geq \sigma_R$$

Orientation de la fissure : La fissure s'ouvre selon la facette orthogonale à la direction principale $\mathbf{n}_1$ (là où $\tau = 0$ et la traction est maximale).

3. **Les deux cas d'école incontournables d'examen (APE 5) :**

- **Torsion pure d'un barreau cylindrique** ($[\sigma]_{(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha r \\ 0 & \alpha r & 0 \end{pmatrix}$) : $\sigma_1 = +\alpha r$, $\sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = -\alpha r$. Pour un matériau **fragile (craie)** : rupture en surface ($r = R$) à 45° de l'axe de torsion (fissure hélicoïdale spectaculaire). Pour un matériau **ductile (barreau d'acier)** : plastification en surface ($r = R$) selon les sections transversales ou axiales ($\tau_{\max} = \alpha R$).
- **Flexion pure d'une poutre** ($[\sigma] = \text{diag}(0, 0, \alpha x_1)$) : $\sigma_1 = \alpha x_1$ sur la fibre tendue supérieure ($x_1 > 0$). Rupture fragile perpendiculaire à l'axe de la poutre.

Définition — Tenseurs de Piola–Kirchhoff P et S

Le tenseur de Cauchy σ rapporte la force actuelle à l'aire actuelle déformée (description eulérienne). En grandes déformations, on utilise des tenseurs rapportés à l'aire initiale non déformée dA_G :

1. **Premier tenseur de Piola–Kirchhoff P (Tenseur nominal / deux-points) :**

Relie la normale matérielle N à la force spatiale réelle actuelle : $t_0(N) = PN$. Par la formule de

Nanson ($n \, da = J F^{-\dagger} N \, dA$) :

$$P = J \sigma F^{-\dagger} \quad \Longleftrightarrow \quad \sigma = \frac{1}{J} P F^{\dagger}$$

En base orthonormée cartésienne : $[P] = J [\sigma] [F]^{-T}$. P n'est **pas symétrique** en général (P^i_I).

2. Second tenseur de Piola–Kirchhoff S (Tenseur purement matériel) :

Obtenu en tirant en arrière la force spatiale sur la configuration de référence :

$$S = F^{-1} P = J F^{-1} \sigma F^{-\dagger} \quad \Longleftrightarrow \quad \sigma = \frac{1}{J} F S F^{\dagger}$$

S est un tenseur matériel purement covariant ou mixte, et il est **strictement symétrique** ($S = S^{\dagger}$).

Théorème — Règle de Leibniz (Transport sous intégrale mobile 1D) – APE 5

Soient $a(t) < b(t)$ les frontières mobiles d'un intervalle 1D et $f(x, t)$ un champ régulier. Le taux de variation de l'intégrale mobile s'écrit :

$$\frac{d}{dt} \int_{a(t)}^{b(t)} f(x, t) \, dx = \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) \, dx + f(b(t), t) \dot{b}(t) - f(a(t), t) \dot{a}(t)$$

Correspondance exacte avec la cinématique continue (APE 3 & 5) : En introduisant le champ de vitesse eulérien $v(x, t)$ vérifiant $v(a(t), t) = \dot{a}(t)$ et $v(b(t), t) = \dot{b}(t)$ aux frontières :

$$f(b) \dot{b} - f(a) \dot{a} = [f v]_{a(t)}^{b(t)} = \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial(f v)}{\partial x} \, dx$$

En combinant avec la dérivée partielle et en rappelant la dérivée matérielle 1D $\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x}$:

$$\frac{d}{dt} \int_{a(t)}^{b(t)} f(x, t) \, dx = \int_{a(t)}^{b(t)} \left(\frac{Df}{Dt} + f \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx$$

Démonstration cinématique par domaine fixe $[0, 1]$ (APE 5) : On pose le changement de variable $x = \chi_t(u) = a(t) + (b(t) - a(t))u$ avec $u \in [0, 1]$. Le Jacobien 1D vaut $J = \frac{\partial x}{\partial u} = b(t) - a(t)$, et vérifie l'équation d'Euler 1D : $\dot{J} = \dot{b} - \dot{a} = J \frac{\partial v}{\partial x}$. En dérivant sous l'intégrale fixe $\int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} [f(\chi_t(u), t) J] \, du$, la règle de dérivation du produit redonne instantanément la formule !

Théorème — Théorème de transport de Reynolds et sa variante massique (APE 5)

Soit $\Omega_t = \varphi_t(\mathcal{P})$ un volume matériel déformable en mouvement dans l'espace physique, et $\psi(x, t)$ un champ volumique quelconque :

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \psi \, dv = \int_{\Omega_t} \left(\frac{D\psi}{Dt} + \psi \operatorname{div} v \right) dv = \int_{\Omega_t} \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} + \operatorname{div}(\psi v) \right) dv$$

Par le théorème de la divergence de Gauss, la variation s'écrit aussi sous forme frontière :

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \psi \, dv = \int_{\Omega_t} \frac{\partial \psi}{\partial t} \, dv + \int_{\partial \Omega_t} \psi g(v, n) \, da$$

Démonstration lagrangienne (APE 5) : On rapatrie l'intégrale sur le domaine matériel fixe $\mathcal{P} \subset \mathcal{B}$ via $x = \varphi_t(X)$ avec $dv = J dV$:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \psi dv = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{P}} \hat{\psi}(X, t) J dV = \int_{\mathcal{P}} \left(\frac{D\psi}{Dt} J + \psi \dot{J} \right) dV$$

Comme $\dot{J} = J \operatorname{div} v$ (relation universelle d'Euler), on factorise $J dV = dv$ et l'on obtient la formule volumique.

Formule de la variante massique de Reynolds : Pour une grandeur massique spécifique Q (telle que $\psi = \rho Q$) :

$$\boxed{\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho Q dv = \int_{\Omega_t} \rho \frac{DQ}{Dt} dv}$$

Deux preuves directes (APE 5) :

a. Par la règle de dérivation d'un produit : $\frac{D(\rho Q)}{Dt} + \rho Q \operatorname{div} v = \rho \frac{DQ}{Dt} + Q \underbrace{\left(\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} v \right)}_{=0 \text{ (bilan de masse)}} =$

$$\rho \frac{DQ}{Dt}.$$

b. Par invariance massique lagrangienne : La masse d'un élément matériel est conservée $\rho J = \rho_0(X) \implies \frac{D}{Dt}(\rho J) = 0$. Rapatrier sur $\mathcal{P}$ donne directement $\int_{\mathcal{P}} \frac{DQ}{Dt} \rho J dV = \int_{\Omega_t} \rho \frac{DQ}{Dt} dv$.
✓

Théorème — Équations de bilan universelles (Formes locales)

En appliquant le théorème de Reynolds et en exploitant le caractère arbitraire du volume matériel Ω_t :

1. **Conservation de la masse** ($\phi = 1$) :

$$\boxed{\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} v = 0 \iff \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho v) = 0}$$

— Forme lagrangienne équivalente : $\rho(x, t) J(X, t) = \rho_0(X)$.

— Écoulement incompressible : $\operatorname{div} v = 0 \iff \dot{J} = 0 \iff \frac{D\rho}{Dt} = 0$.

2. **Bilan de quantité de mouvement** ($\phi = v$, **Équation de Cauchy**) :

$$\boxed{\operatorname{div} \sigma + \rho b = \rho a = \rho \frac{Dv}{Dt}}$$

où b est le champ de force massique à distance (ex : pesanteur $b = -g e_z$).

— En statique ou à vitesse constante ($a = 0$) : $\operatorname{div} \sigma + \rho b = 0$.

— En coordonnées cartésiennes : $\partial_j \sigma^i_j + \rho b^i = \rho (\partial_t v^i + v^j \partial_j v^i)$.

3. **Bilan de moment cinétique (Symétrie de Cauchy)** : En l'absence de couples volumiques internes répartis :

$$\boxed{\sigma = \sigma^\dagger \iff \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \text{ (en base orthonormée)}}$$

Le tenseur des contraintes de Cauchy est **fondamentalement symétrique** / **auto-adjoint**.

Théorème — Élasticité linéaire isotrope (Loi de Hooke)

Pour un solide élastique isotrope sous l'hypothèse des petites perturbations ($\|\nabla u\| \ll 1$) :

$$\sigma = \lambda \operatorname{tr}(\varepsilon) I + 2\mu \varepsilon$$

où λ et $\mu = G$ sont les **coefficients de Lamé** (μ est le module de cisaillement).

Relations fondamentales avec les modules d'ingénieur (E, ν) :

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad K = \lambda + \frac{2}{3}\mu = \frac{E}{3(1-2\nu)}$$

- E : module d'Young ([Pa] ou N/m²), rigidité en traction.
- ν : coefficient de Poisson (sans unité, typiquement $0,25 \leq \nu \leq 0,33$ pour les métaux, $\nu \rightarrow 0,5$ pour un matériau incompressible comme le caoutchouc).
- K : module de compressibilité hydrostatique.

Loi de Hooke inverse (déformations en fonction des contraintes) :

$$\varepsilon = \frac{1+\nu}{E} \sigma - \frac{\nu}{E} \operatorname{tr}(\sigma) I$$

En coordonnées cartésiennes : $\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij}$.

Propriété — Les trois cas d'école d'élasticité à l'examen

1. **Traction uniaxiale pure selon x** ($\sigma_{xx} = \sigma_0$, autres nuls) :

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\sigma_0}{E}, \quad \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = -\nu \frac{\sigma_0}{E} \implies \frac{\Delta V}{V} = \operatorname{tr}(\varepsilon) = \frac{1-2\nu}{E} \sigma_0$$

2. **Contrainte plane (Plaques minces dans le plan (x, y) , $\sigma_{zz} = \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0$) :**

$$\varepsilon_{zz} = -\frac{\nu}{1-\nu} (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) \neq 0$$

La loi constitutive 2D reliant les contraintes aux déformations planes s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\nu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{pmatrix}$$

3. **Déformation plane (Cylindres longs, barrages massifs selon z , $\varepsilon_{zz} = \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = 0$) :**

$$\sigma_{zz} = \nu (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \neq 0$$

La matière est confinée selon z : elle génère une contrainte de réaction σ_{zz} pour empêcher l'expansion axiale.

Théorème — Fluides newtoniens et équations de Navier–Stokes

Pour un fluide visqueux newtonien isotrope, le tenseur de Cauchy dépend linéairement du taux de déformation $D = \operatorname{sym}_g(\nabla v)$:

$$\sigma = -p I + 2\mu D + \lambda_v \operatorname{tr}(D) I$$

où p est la pression thermodynamique et μ la viscosité dynamique ([Pa · s]).

Fluide newtonien incompressible ($\operatorname{div} v = \operatorname{tr} D = 0$) :

$$\sigma = -pI + 2\mu D$$

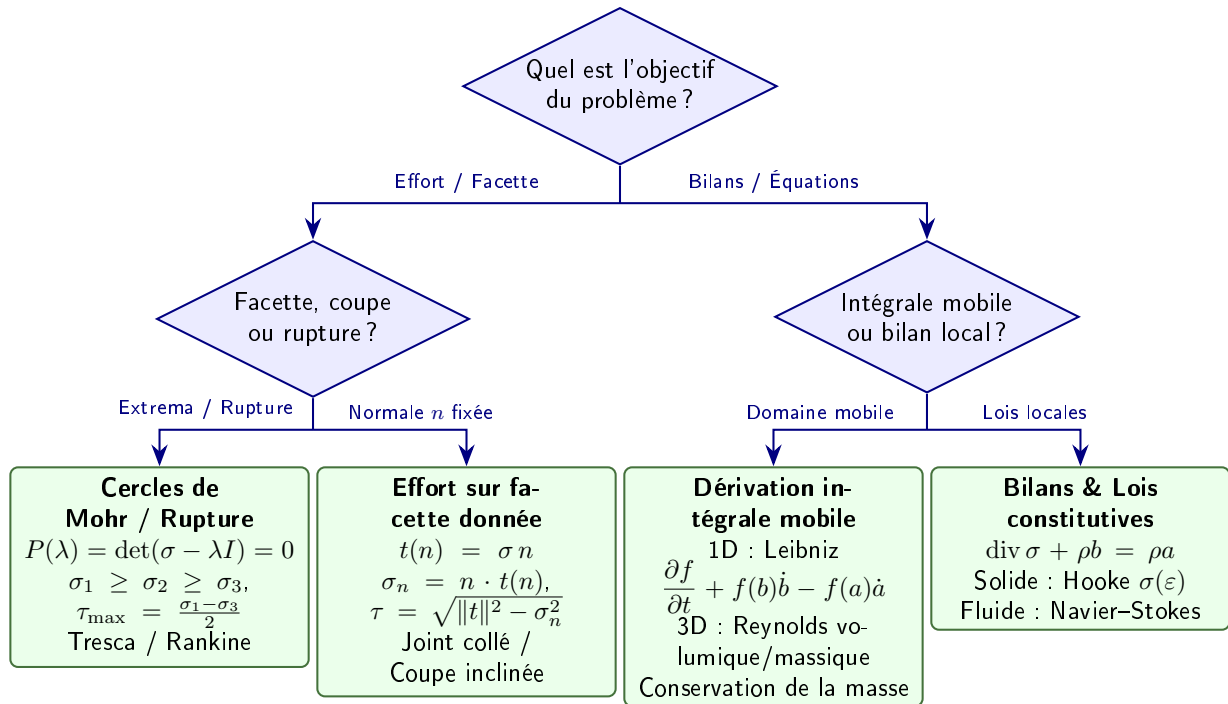
En injectant cette loi dans le bilan de quantité de mouvement ($\operatorname{div} \sigma + \rho b = \rho a$) avec $\operatorname{div}(2\mu D) = \mu \Delta v$:

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + \nabla_v v \right) = -\nabla p + \mu \Delta v + \rho b$$

C'est la célèbre **équation de Navier–Stokes incompressible**.

4.2 Procédures de résolution

4.2.1 Arbre décisionnel : quelle équation et quelle méthode appliquer ?



Procédure : Vecteur contrainte, contrainte normale et cisaillement sur facette donnée

Donnée : Le tenseur des contraintes de Cauchy $[\sigma]$ et l'orientation d'une facette (définie par son équation cartésienne ou un angle θ).

Étape 1 Déterminer la normale unitaire sortante n : Si la facette fait un angle θ avec l'axe

$$x, n = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}. \text{ Vérifier rigoureusement que } \|n\|_g = \sqrt{n_1^2 + n_2^2} = 1.$$

Étape 2 Calculer le vecteur contrainte $t(n)$:

$$[t(n)] = [\sigma] [n] = \begin{pmatrix} \sigma_{11}n_1 + \sigma_{12}n_2 \\ \sigma_{21}n_1 + \sigma_{22}n_2 \end{pmatrix}$$

Étape 3 Calculer la contrainte normale σ_n :

$$\sigma_n = [n]^T [t(n)] = [n]^T [\sigma] [n] = \sigma_{11}n_1^2 + 2\sigma_{12}n_1n_2 + \sigma_{22}n_2^2$$

Interprétation : Si $\sigma_n > 0$, la facette subit de la traction (risque d'arrachement). Si $\sigma_n < 0$, de la compression.

Étape 4 Calculer la cisssion tangentielle τ :

$$\tau = \sqrt{\|t(n)\|^2 - \sigma_n^2} = \sqrt{(t_1^2 + t_2^2) - \sigma_n^2}$$

Interprétation : τ quantifie le cisaillement pur le long de la coupe (risque de glissement).

Procédure : Tracer les cercles de Mohr et déterminer les contraintes extrémales (APE 5)

Donnée : La matrice des contraintes $[\sigma]$ en un point (symétrique réelle 3×3).

Étape 1 Calculer les contraintes principales et les ordonner : Résoudre le polynôme caractéristique $P(\lambda) = \det([\sigma] - \lambda I_3) = 0$. Ordonner impérativement les trois racines réelles par ordre décroissant :

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$$

Attention aux signes négatifs : $-1 > -5$, donc $\sigma_1 = -1$ et $\sigma_3 = -5$!

Étape 2 Déterminer les directions principales ($\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3$) : Résoudre $([\sigma] - \sigma_I I) \mathbf{n}_I = 0$, normaliser $\|\mathbf{n}_I\| = 1$, et ajuster pour former une base orthonormée directe.

Étape 3 Tracer les cercles de Mohr dans le plan (σ_n, τ) :

- Placer les trois points $(\sigma_3, 0)$, $(\sigma_2, 0)$, $(\sigma_1, 0)$ sur l'axe horizontal.
- Tracer le demi-cercle C_{23} de diamètre $[\sigma_3, \sigma_2]$ (centre $\frac{\sigma_3 + \sigma_2}{2}$, rayon $R_{23} = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}$).
- Tracer le demi-cercle C_{12} de diamètre $[\sigma_2, \sigma_1]$ (centre $\frac{\sigma_2 + \sigma_1}{2}$, rayon $R_{12} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$).
- Tracer le grand demi-cercle C_{13} de diamètre $[\sigma_3, \sigma_1]$ (centre $\frac{\sigma_3 + \sigma_1}{2}$, rayon $R_{13} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$).
- Hachurer la zone admissible comprise entre le grand cercle et les deux petits.

Étape 4 Extraire les extrema et facettes critiques :

- **Traction maximale :** $\max \sigma_n = \sigma_1$ sur la facette $\mathbf{n}_1$ ($\tau = 0$).
- **Compression maximale :** $\min \sigma_n = \sigma_3$ sur la facette $\mathbf{n}_3$ ($\tau = 0$).
- **Cisaillement maximal absolu :** $\tau_{\max} = R_{13} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$, atteint sur les deux facettes orientées à 45° : $\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{n}_1 \pm \mathbf{n}_3)$.

Procédure : Décomposition sphérique-déviatoire d'un tenseur de contraintes

Donnée : Le tenseur des contraintes de Cauchy $[\sigma]$.

Étape 1 Calculer la trace de $[\sigma]$: $\text{tr}[\sigma] = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$.

Étape 2 Calculer la contrainte moyenne sphérique σ_m : $\sigma_m = \frac{1}{3} \text{tr}[\sigma]$. La pression hydrostatique moyenne associée est $p = -\sigma_m$.

Étape 3 Former le déviateur des contraintes $[\sigma_d]$:

$$[\sigma_d] = [\sigma] - \sigma_m I_3$$

Étape 4 Sanity check immédiat : Vérifier rigoureusement que $\text{tr}[\sigma_d] = 0$.

Étape 5 Directions principales de $[\sigma_d]$: Ce sont **exactement les mêmes** que celles de $[\sigma]$ ($\mathbf{n}_I$). Leurs valeurs propres sont $\lambda_I(\sigma_d) = \sigma_I - \sigma_m$.

Procédure : Dérivation temporelle d'intégrales à domaine mobile (Leibniz & Reynolds)

Donnée : Une grandeur physique intégrée sur un domaine dépendant du temps.

Étape 1 Identifier la dimension géométrique du domaine :

— *Domaine 1D (Intervalle $[a(t), b(t)]$) :* Appliquer la **règle de Leibniz** :

$$\frac{d}{dt} \int_{a(t)}^{b(t)} f(x, t) dx = \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) dx + f(b(t), t) \dot{b}(t) - f(a(t), t) \dot{a}(t)$$

— *Domaine 3D (Volume matériel déformable Ω_t) :* Appliquer le **théorème de Reynolds**.

Étape 2 Pour un volume 3D, identifier la nature de la grandeur :

— *Grandeur volumique $\psi(x, t)$:* Utiliser la forme volumique $\int_{\Omega_t} \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} + \text{div}(\psi v) \right) dv$

ou la forme frontière $\int_{\Omega_t} \frac{\partial \psi}{\partial t} dv + \int_{\partial \Omega_t} \psi (v \cdot n) da$.

— *Grandeur massique spécifique Q ($\psi = \rho Q$) :* Utiliser impérativement la **variante massique express** :

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho Q dv = \int_{\Omega_t} \rho \frac{DQ}{Dt} dv$$

Étape 3 Passer de la forme intégrale à la loi locale : Si l'intégrale est nulle pour *tout* sous-volume matériel arbitraire Ω_t et que l'intégrande est continu, poser l'**intégrande égal à zéro** en tout point (équation locale de continuité ou bilan de Cauchy).

Procédure : Intégrer l'équilibre et champ de contrainte

Donnée : Des conditions aux limites sur le bord (pressions, traction imposée $t(n) = t_{\text{ext}}$) et les forces massiques b .

Étape 1 Poser les équations d'équilibre statique locales :

$$\text{div } \sigma + \rho b = 0 \iff \begin{cases} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + \rho b_x = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} + \rho b_y = 0 \end{cases}$$

Étape 2 Exploiter la symétrie de Cauchy : poser $\sigma_{xy} = \sigma_{yx}$.

Étape 3 Intégrer par rapport aux coordonnées spatiales et introduire les fonctions d'intégration.

Étape 4 Appliquer les conditions aux limites sur les bords libres et chargés : Sur toute surface libre de normale n : $\sigma n = 0$. Sur une surface soumise à une pression fluide p : $\sigma n = -p n$.

Astuce — Contrainte Plane $\longleftrightarrow$ Déformation Plane

Tous les calculs analytiques 2D d'élasticité (barrage, disque percé, poutre) sous hypothèse de **déformation plane** s'obtiennent **instantanément** à partir des résultats de **contrainte plane** en effectuant la simple substitution formelle des coefficients élastiques :

$$E \longleftrightarrow \frac{E}{1 - \nu^2}, \quad \nu \longleftrightarrow \frac{\nu}{1 - \nu}$$

Cette substitution transforme n'importe quelle formule d'examen sans refaire 2 pages de calcul !

Exemple — Facette inclinée d'un barreau en traction (Examen)

Un barreau cylindrique est soumis à une traction uniforme $\sigma_{xx} = \sigma_0 > 0$, tous les autres $\sigma_{ij} = 0$. On étudie la contrainte sur une facette plane inclinée d'un angle θ par rapport à l'axe transverse y , de normale unitaire $n = (\cos \theta, \sin \theta)^T$.

1. Vecteur contrainte $t(n)$:

$$[t(n)] = \begin{pmatrix} \sigma_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_0 \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

2. Contrainte normale et cisaillement :

$$\begin{aligned} \sigma_n &= [n]^T [t(n)] = \cos \theta (\sigma_0 \cos \theta) + \sin \theta (0) = \sigma_0 \cos^2 \theta = \frac{\sigma_0}{2} (1 + \cos(2\theta)) \\ \|t(n)\|^2 &= (\sigma_0 \cos \theta)^2 = \sigma_0^2 \cos^2 \theta \\ \tau^2 &= \|t(n)\|^2 - \sigma_n^2 = \sigma_0^2 \cos^2 \theta - \sigma_0^2 \cos^4 \theta = \sigma_0^2 \cos^2 \theta (1 - \cos^2 \theta) = \sigma_0^2 \cos^2 \theta \sin^2 \theta \\ \implies \tau(\theta) &= \sigma_0 \cos \theta \sin \theta = \frac{\sigma_0}{2} \sin(2\theta) \end{aligned}$$

3. Extrema et plan de rupture critique (Question classique d'examen) :

- Pour $\theta = 0$ (coupe droite perpendiculaire à la traction) : $\sigma_n = \sigma_0$ (traction maximale) et $\tau = 0$ (aucun cisaillement).
- Pour $\theta = 45^\circ$ ($\pi/4$) : $\sigma_n = \sigma_0/2$ et $\tau_{\max} = \frac{\sigma_0}{2}$ (**cisaillement maximal universel**).

Conclusion d'ingénieur : Les matériaux ductiles (acier, aluminium) glissent et cassent à 45° sous traction uniaxiale, précisément là où la cission τ est maximale !

Exemple — Rupture en torsion d'un barreau : Craie fragile vs Acier ductile (APE 5)

Un barreau cylindrique d'axe $\mathbf{e}_z$ et de rayon R est sollicité en torsion pure ($\alpha > 0$). En base cylindrique $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z)$, le champ de contrainte s'écrit :

$$[\sigma] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha r \\ 0 & \alpha r & 0 \end{pmatrix}$$

1. Contraintes principales en chaque rayon r :

$$\det([\sigma] - \lambda I_3) = -\lambda (\lambda^2 - (\alpha r)^2) = 0 \implies \boxed{\sigma_1 = +\alpha r, \quad \sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = -\alpha r}$$

Les contraintes extrémales sont atteintes sur la périphérie du barreau en $r = R$: $\sigma_1 = +\alpha R$ et $\sigma_3 = -\alpha R$.

2. Directions principales en surface ($r = R$) :

- Pour $\sigma_1 = +\alpha R$: $(\sigma - \sigma_1 I)\mathbf{n}_1 = 0 \implies \mathbf{n}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_\theta + \mathbf{e}_z)$ (incliné à 45° par rapport à l'axe $\mathbf{e}_z$).
- Pour $\sigma_2 = 0$: $\mathbf{n}_2 = \mathbf{e}_r$ (normale radiale).
- Pour $\sigma_3 = -\alpha R$: $\mathbf{n}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_\theta - \mathbf{e}_z)$ (incliné à -45°).

3. Prédiction des modes et surfaces de rupture (Question d'examen APE 5) :

- **Matériau fragile (bâton de craie)** : Rompt selon le critère de Rankine ($\sigma_1 \geq \sigma_R$). La rupture s'amorce en surface ($r = R$) et se propage perpendiculairement à $\mathbf{n}_1$. Cela génère une **surface de rupture hélicoïdale inclinée à 45° de l'axe** !
- **Matériau ductile (barreau d'acier)** : Plastifie selon le critère de Tresca :

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{\alpha R - (-\alpha R)}{2} = \alpha R$$

Le glissement plastique s'amorce en surface sur les sections transversales ($z = \text{cte}$) et axiales ($\theta = \text{cte}$), où s'exerce le cisaillement pur $\sigma_{\theta z} = \alpha R$.

Exemple — Effort sur un joint collé triangulaire et lecture sur cercle de Mohr (APE 5)

Une plaque carrée mince de côté L est formée de deux pièces triangulaires collées selon sa diagonale de normale sortante $\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2)$. L'état de contrainte homogène dans la plaque vaut (en MPa) :

$$[\sigma] = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \sigma_{33} = 0 \quad (\text{contrainte plane})$$

1. Effort transmis à travers le joint collé :

$$[t(\mathbf{n})] = [\sigma][\mathbf{n}] = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/\sqrt{2} \\ 3/\sqrt{2} \end{pmatrix} = 3\mathbf{n} \quad [\text{MPa}]$$

2. Contrainte normale et cisaillement sur la colle :

$$\sigma_n = \mathbf{n} \cdot t(\mathbf{n}) = 3 \text{ MPa} > 0 \quad (\text{traction pure}), \quad \tau = \sqrt{\|t(\mathbf{n})\|^2 - \sigma_n^2} = \sqrt{9 - 9} = 0 \text{ MPa}$$

Conclusion remarquable : La colle travaille en **traction pure sans aucun cisaillement** ($\tau = 0$) !

3. Cercles de Mohr et contrainte de cisaillement maximale de la pièce : Les contraintes principales en 3D sont les valeurs propres de $[\sigma]$:

$$\det([\sigma] - \lambda I_2) = (2 - \lambda)^2 - 1 = 0 \implies \lambda = 3 \text{ ou } 1, \quad \sigma_3 = 0 \quad (\text{axe } z)$$

On ordonne rigoureusement : $\sigma_1 = 3 \text{ MPa}, \quad \sigma_2 = 1 \text{ MPa}, \quad \sigma_3 = 0 \text{ MPa}$.

- Le point du joint est $(\sigma_n, \tau) = (3, 0)$: il coïncide exactement avec le sommet principal σ_1 sur le grand cercle de Mohr !
- Le cisaillement maximal absolu subi par la plaque vaut :

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{3 - 0}{2} = 1,5 \text{ MPa}$$

Il s'exerce sur les facettes orientées à 45° entre $\mathbf{n}_1$ et $\mathbf{n}_3 = \mathbf{e}_3$, et non sur le joint de colle !

Exemple — Règle de Leibniz et dérivation d'intégrale mobile 1D (APE 5)

On considère l'intégrale dépendant du temps $I(t) = \int_t^{2t} x t \, dx$.

Méthode 1 : Calcul direct d'abord, dérivation ensuite :

$$I(t) = t \left[\frac{x^2}{2} \right]_t^{2t} = t \left(\frac{4t^2 - t^2}{2} \right) = \frac{3}{2} t^3 \implies \boxed{\frac{dI}{dt} = \frac{9}{2} t^2}$$

Méthode 2 : Application de la formule de Leibniz : Ici $f(x, t) = x t$, $a(t) = t \implies \dot{a}(t) = 1$, et $b(t) = 2t \implies \dot{b}(t) = 2$.

$$\int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) \, dx = \int_t^{2t} x \, dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_t^{2t} = \frac{4t^2 - t^2}{2} = \frac{3}{2} t^2$$

$$f(b(t), t) \dot{b}(t) = ((2t) \cdot t) \cdot 2 = 4t^2$$

$$-f(a(t), t) \dot{a}(t) = -((t) \cdot t) \cdot 1 = -t^2$$

En sommant les trois contributions :

$$\frac{dI}{dt} = \frac{3}{2} t^2 + 4t^2 - t^2 = \frac{3}{2} t^2 + 3t^2 = \boxed{\frac{9}{2} t^2} \quad \checkmark (\text{Parfaite concordance !})$$

Attention — Pièges d'examen sur les contraintes, Mohr et Reynolds (APE 5)

1. **Ne pas ordonner les valeurs propres de contrainte** : La formule du cisaillement maximal absolu $\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$ n'est valable que si $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$. Si vous oubliez une contrainte nulle en contrainte plane ($\sigma_3 = 0$) alors qu'une valeur propre est négative ($\sigma_3 = -2 < 0$), vous sous-estimez dramatiquement $\tau_{\max}$!
2. **Ne pas confondre σ_n et $\|t(n)\|$** : Le scalaire $\sigma_n = n \cdot t(n)$ est une **projection orientée** (positive en traction, négative en compression). La norme $\|t(n)\|$ est toujours positive.
3. **Angle spatial θ vs Angle sur le cercle de Mohr 2θ** : Une rotation d'un angle physique θ de la facette dans l'espace correspond à un angle de 2θ autour du centre du cercle de Mohr !
4. **Oublier les flux frontières dans Leibniz ou Reynolds** : La dérivée d'une intégrale à domaine mobile n'est **jamais** égale à la simple intégrale de la dérivée partielle locale, sauf si les parois sont strictement immobiles !
5. **Le piège de la contrainte plane** : En contrainte plane ($\sigma_{zz} = 0$), la déformation transverse ε_{zz} n'est **pas nulle** ! Elle vaut $\varepsilon_{zz} = -\frac{\nu}{E}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})$. L'épaisseur de la plaque diminue sous traction.

5 Méthodes transversales et réflexes d'examen

Ce dernier chapitre ne contient pas de nouvelle théorie, mais compile les **réflexes de survie**, les **arbres de diagnostic** et le **dictionnaire traducteur d'énoncé** pour sécuriser un $\geq 16/20$ le jour de l'épreuve.

5.1 Le Traducteur d'énoncé (Dictionnaire d'examen)

Face à un sujet d'examen, chaque mot-clé de l'énoncé masque une condition mathématique rigoureuse :

5.1.1 1. Géométrie, cinématique et déformations (Chapitres 1 à 3)

Ce que dit l'énoncé	Sens physique profond	Traduction mathématique
« Le milieu est incompressible »	Le volume de chaque parcelle de matière est conservé au cours du temps.	$J(t) = 1 \iff \dot{J} = 0$ $\iff \boxed{\operatorname{div} v = \operatorname{tr} D = 0}$
« Mouvement de corps rigide »	Le solide tourne ou translate dans l'espace sans subir de déformation.	$E = 0 \iff C = G$ $\iff \boxed{F = R \iff D = 0}$ <i>($F \neq I$ et $W \neq 0$ si rotation)</i>
« Surface isotherme / isovaleur »	La particule se déplace le long d'une courbe de niveau de température T .	$dT(v) = 0 \iff \boxed{v \perp_g \operatorname{grad} T}$
« Petites perturbations / Linéarisation »	Les gradients de déplacement sont infinitésimaux ($\ \nabla u\ \ll 1$).	Négliger l'ordre 2 : $\boxed{E \approx \varepsilon = \operatorname{sym}(\nabla u)}$
« Mesure optique par CIN (Mecapix) »	Suivi de sous-fenêtres sur mouchetis sous conservation de luminance.	$I_t(x + u_x, y + u_y) \approx I_0(x, y)$ $\implies \boxed{\nu = -\varepsilon_{xx}/\varepsilon_{yy}}$ en compression

5.1.2 2. Contraintes, rupture, bilans et transport (Chapitre 4)

Ce que dit l'énoncé	Sens physique profond	Traduction mathématique
« État de contrainte hydrostatique »	Pas de cisaillement, pression identique dans toutes les directions d'espace.	$\sigma = -p I \iff \sigma_{ij} = -p \delta_{ij}$
« Surface libre de toute charge »	La frontière n'est soumise à aucune force extérieure venant du dehors.	$t(n) = \sigma n = 0$ (sur tout le bord libre)
« Surface sous pression p_0 »	Le fluide extérieur pousse perpendiculairement à la paroi vers l'intérieur.	$t(n) = \sigma n = -p_0 n$
« Contrainte plane (plaque mince) »	Les faces supérieure et inférieure sont libres de contrainte selon l'épaisseur z .	$\sigma_{zz} = \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0$ $\implies \varepsilon_{zz} = -\frac{\nu}{1-\nu}(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy})$
« Déformation plane (corps massif) »	Aucun déplacement possible selon la direction infinie ou bloquée z .	$\varepsilon_{zz} = \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = 0$ $\implies \sigma_{zz} = \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})$
« Cercles de Mohr / Cisaillement maximal »	Domaine admissible des efforts sur toute facette et pire cisaillement.	Ordonner $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ $\implies \tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$ à 45°
« Rupture d'un solide fragile (craie, fonte) »	Rupture par décohesion sur la facette la plus tendue (Rankine).	$\sigma_1 \geq \sigma_R$ (orientée selon $\mathbf{n}_1$, à 45° en torsion)
« Plastification d'un solide ductile (acier) »	Écoulement plastique par glissement maximal (Tresca).	$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \geq \tau_y$ (orienté à 45° de $\mathbf{n}_1$ et $\mathbf{n}_3$)
« Décomposer l'effort en volume et distortion »	Isoler la pression hydrostatique moyenne du cisaillement déviatoire.	$\sigma = \sigma_m I_3 + \sigma_d$ avec $\sigma_m = \frac{1}{3} \text{tr } \sigma$ et $\text{tr } \sigma_d = 0$
« Dériver une intégrale à bornes mobiles 1D »	Prendre en compte l'accumulation locale et les flux aux frontières.	Règle de Leibniz : $\frac{\partial}{\partial t} \int_a^b f dx + f(b)\dot{b} - f(a)\dot{a}$
« Dériver sous l'intégrale mobile 3D »	Bilan intégral sur volume déformable Ω_t ou masse matérielle.	Reynolds volumique ou massique : $\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho Q dv = \int_{\Omega_t} \rho \frac{DQ}{Dt} dv$

5.2 Les Red Flags : signes que vous êtes sur la mauvaise piste

Si vous vous retrouvez dans l'une des situations suivantes, **arrêtez-vous immédiatement** et cherchez une autre méthode !

Attention — Red Flag 1 : Un calcul $[C]$ ou $[E]$ qui explose en taille

Vous développez $[F]^T[g][F]$ et vous vous retrouvez avec des dizaines de termes croisés non nuls.

Que faire ?

- **Coordonnées** : Êtes-vous dans les bonnes coordonnées ? Un problème à symétrie cylindrique se résout en cylindriques, pas en cartésiennes.
- **Simplification** : Vérifiez si $[g] = I$ ou $[G] = I$ (euclidien cartésien) — dans ce cas $[C] = [F]^T[F]$.
- **Diagonalité** : Si la transformation est selon les axes propres, $[F]$ et $[C]$ sont diagonales.

Attention — Red Flag 2 : Divergence ou laplacien incohérents

Vous calculez $\text{div } u$ en polaires et vous obtenez une expression avec des unités incohérentes ou un résultat qui ne vérifie pas le cas trivial.

Que faire ?

- Vérifiez que vous utilisez les **composantes coordonnées** u^i et pas les composantes physiques $\hat{u}^i$.
- Utilisez la formule avec $\sqrt{\det[g]}$ et vérifiez le cas constant.

Attention — Red Flag 3 : $E \neq 0$ pour une rotation rigide

Si votre calcul de E pour une rotation rigide connue donne $E \neq 0$, vous avez fait une erreur.

Que faire ?

- Vérifiez que $[R]^T[R] = I$ pour votre matrice de rotation.
- Si vous utilisez le déplacement : ne négligez pas le terme quadratique $[H]^T[H]$ si la rotation est finie !

Attention — Red Flag 4 : Erreur d'ordre sur les contraintes principales $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$

Vous calculez le cisaillement maximal $\tau_{\max}$ avec deux valeurs propres quelconques au lieu de $\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$, ou vous oubliez la contrainte nulle $\sigma_3 = 0$ en contrainte plane alors qu'une contrainte est négative.

Que faire ?

- Ordonnez impérativement les trois valeurs propres réelles avec leurs signes : $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$.
- Rappelez-vous que $-1 > -4$! Si les valeurs propres sont $2, -4, 0$, alors $\sigma_1 = 2$, $\sigma_2 = 0$, et $\sigma_3 = -4 \implies \tau_{\max} = \frac{2 - (-4)}{2} = 3 \text{ MPa}$!

Attention — Red Flag 5 : Oubli des flux de frontière dans la dérivation sous intégrale mobile

Vous dérivez une intégrale $I(t) = \int_{a(t)}^{b(t)} f(x, t) dx$ ou $\int_{\Omega_t} \psi dv$ en dérivant uniquement l'intégrande, sans inclure les termes de déplacement des bornes.

Que faire ?

- En 1D : ajouter immédiatement $+f(b, t)\dot{b} - f(a, t)\dot{a}$ (formule de Leibniz).
- En 3D : ajouter le terme convectif frontière $\int_{\partial\Omega_t} \psi(v \cdot n) da$ ou utiliser la variante massique $\int \rho \frac{DQ}{Dt} dv$.

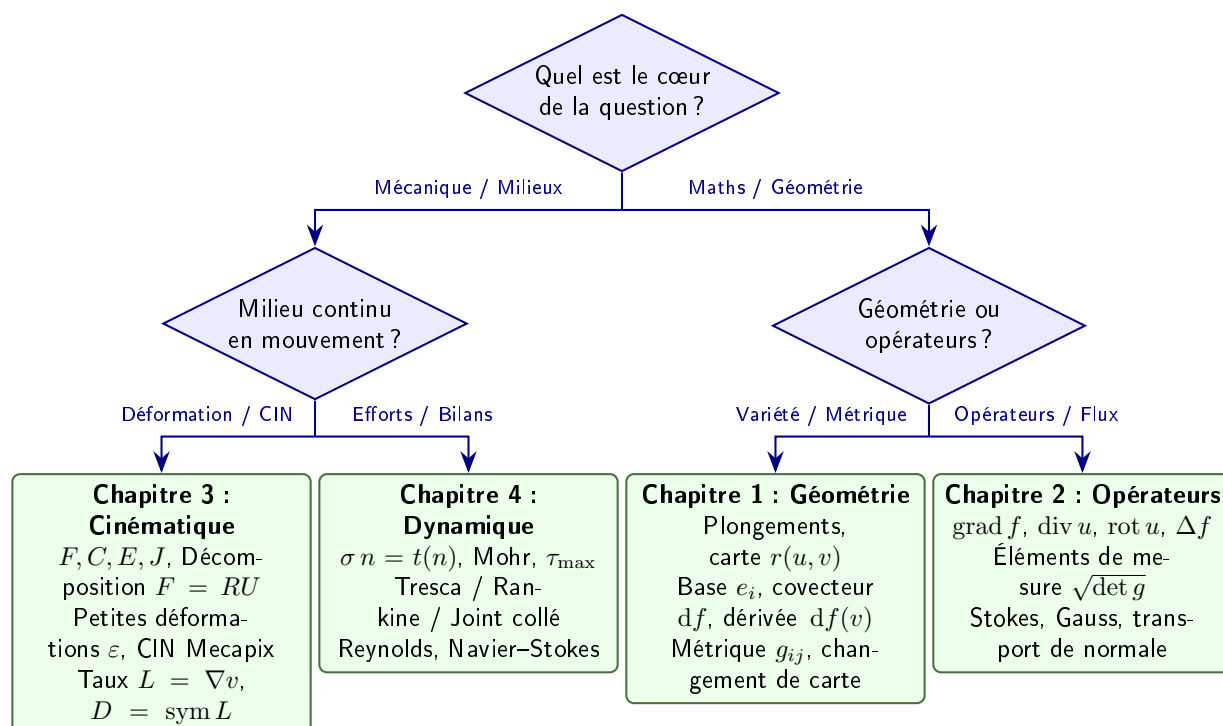
Attention — Red Flag 6 : Confusion cisaillement simple vs cisaillement pur

Vous supposez qu'un essai de cisaillement simple ($u_x = \gamma y, u_y = 0$) est sans rotation.

Que faire ?

- Rappelez-vous que la matrice de cisaillement simple contient un taux de spin non nul : $[W] = \begin{pmatrix} 0 & -\gamma/2 \\ \gamma/2 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$.
- La distorsion angulaire vaut $\gamma = 2\varepsilon_{xy}$ (ne pas oublier le facteur 2 !).

5.3 Arbre de décision ultime : comment router un problème d'examen ?



5.4 Vérifications de bon sens (*Sanity Checks*)

Prenez 15 secondes à la fin de chaque exercice pour passer ce crible :

- Signe et positivité** : $\det[C] > 0$ toujours. $J > 0$ si l'orientation est préservée. $\|FA\|_g^2 = C(A, A) > 0$ pour tout $A \neq 0$.
- Tenseur des contraintes et Mohr** :
 - Auto-adjonction : $[\sigma]^T = [\sigma]$ en base orthonormée.
 - Trace du déviateur : $\text{tr}[\sigma_d] = 0$ toujours !
 - Cisaillement maximal : $\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \geq 0$ avec $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$.
 - Zone admissible : Tout couple (σ_n, τ) calculé sur une facette réelle doit impérativement tomber dans la zone comprise entre le grand cercle et les deux petits cercles de Mohr.
- Dimensions et tailles de matrices** :
 - $[F]$: $n_{\text{spatial}} \times n_{\text{matériel}}$.
 - $[C]$, $[E]$, $[G]$, $[S]$: $n_{\text{matériel}} \times n_{\text{matériel}}$.
 - $[L]$, $[D]$, $[W]$, $[\sigma]$: $n_{\text{spatial}} \times n_{\text{spatial}}$.
 - $[P]$: $n_{\text{spatial}} \times n_{\text{matériel}}$.
- Cas limites triviaux** :
 - Identité ($\varphi_t = \text{id}$) : $F = I$, $C = G$, $E = 0$, $J = 1$, $\sigma = 0$.
 - Rotation rigide : $F = R \implies E = 0$, $D = 0$, $\text{div } v = 0$.
 - **Distinction volume vs forme** : $J = 1$ (déformation isochore) n'implique pas $E = 0$.
 - Leibniz à bornes fixes : $\dot{a} = \dot{b} = 0 \implies \dot{I} = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial t} dx$.
- Constantes élastiques physiques** : Le coefficient de Poisson d'un matériau isotrope stable vérifie toujours $0 \leq \nu < 0,5$ ($\nu \rightarrow 0,5$ pour un matériau incompressible comme le caoutchouc).

6. Cohérence indicielle (convention d'Einstein) :

- Un indice libre apparaît une seule fois, des deux côtés de l'égalité.
- Un indice muet apparaît exactement deux fois : une fois en haut, une fois en bas.
- Jamais trois fois le même indice dans un même terme.

7. **Indépendance des coordonnées** : Le résultat d'un produit scalaire $g(u, v)$, d'une trace $\text{tr } L$, d'une divergence, d'une énergie ou d'un flux est un **scalaire universel** indépendant du choix de carte.

8. **Compatibilité** $\dot{J}/J = \text{div } v$: Si vous avez calculé J et $\text{div } v$ indépendamment, vérifiez impérativement que $\dot{J} = J \text{div } v$.

5.5 Formulaire des métriques et éléments de mesure

Astuce — Tableau récapitulatif des géométries usuelles

Géométrie	Coordonnées	$[g_{ij}]$	$\sqrt{\det[g]}$
Cercle 1D	(θ)	$[R^2]$	R
Plan cartésien 2D	(x, y)	I_2	1
Plan polaire 2D	(r, θ)	$\text{diag}(1, r^2)$	r
Surface cylindrique 2D	(θ, z)	$\text{diag}(R^2, 1)$	R
Surface sphérique 2D	(θ, φ)	$\text{diag}(R^2, R^2 \sin^2 \theta)$	$R^2 \sin \theta$
Volume cartésien 3D	(x, y, z)	I_3	1
Volume cylindrique 3D	(r, θ, z)	$\text{diag}(1, r^2, 1)$	r
Volume sphérique 3D	(r, θ, φ)	$\text{diag}(1, r^2, r^2 \sin^2 \theta)$	$r^2 \sin \theta$

Matrice de passage base coordonnée $\rightarrow$ orthonormée : $H = \text{diag}(h_1, \dots, h_n)$ avec $h_i = \sqrt{g_{ii}}$.