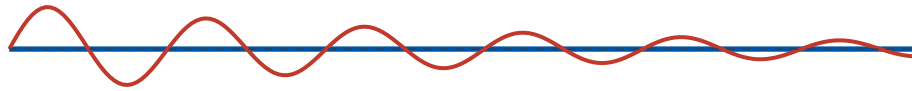


Synthèse Ultime

Analyse 1 — LEPL1102



Orientée résolution de problèmes

Basée sur l'analyse de **66 examens corrigés** (2018–2026)

Légende des encadrés

Bleu

Procédure de résolution pas-à-pas

Rouge

Piège / Erreur fréquente

Vert

Astuce

Gris

Théorème

Orange

Définition

Violet

Exercice type d'examen

Table des matières

1	Préliminaires	Examen : ~20%	4
1.1	Moyennes		4
1.2	Inégalités		4
1.3	Ensembles : Bornes et Extrema		4
2	Suites	Examen : ~30%	6
2.1	Convergence		6
2.2	Suites particulières		6
2.3	Procédures de résolution		6
3	Séries numériques	Examen : ~100%	8
3.1	Séries de référence		8
3.2	Convergence absolue et conditionnelle		8
3.3	Critères de convergence		8
3.4	Algorithme de résolution		12
3.5	Séries entières et rayon de convergence		13
4	Nombres complexes	Examen : ~70%	15
4.1	Définitions et Formes		15
4.2	Procédures de résolution		16
4.3	Cercle d'Apollonius		22
5	Continuité et Limites	Examen : ~60%	24
5.1	Définitions et Théorèmes fondamentaux		24
5.2	Procédures de résolution		24
5.3	Dérivées des fonctions usuelles et réciproques		26
5.4	Exemples d'examens		26
6	Taylor et Approximation	Examen : ~100%	28
6.1	Théorèmes fondamentaux		28
6.2	Développements de Maclaurin classiques (à savoir par cœur!)		29
6.3	Procédures de résolution		29
7	Intégrales	Examen : ~60%	34
7.1	Théorèmes fondamentaux		34
7.2	Techniques d'intégration		35
7.3	Intégrales impropres		35
7.4	Applications géométriques		36
8	Équations Différentielles (EDO)	Examen : ~100%	40
8.1	Théorèmes fondamentaux		40
8.2	Équations différentielles du 1er ordre		40
8.3	Équations différentielles du 2nd ordre (Coeffs. constants)		41
8.4	Modélisation Physique (Le problème final de l'examen)		42
9	Suites et Séries de Fonctions	Examen : ~30%	44
9.1	Convergence simple et uniforme		44
9.2	Procédures de résolution		44

10 Fonctions à plusieurs variables	Examen : ~100%	46
10.1 Topologie de $\mathbb{R}^n$		46
10.2 Graphes, Ensembles de niveau et Classes de fonctions		47
10.3 Limites et Continuité		47
10.4 Dérivées partielles, Gradient et Plan Tangent		48
10.5 Règle de composition (Chain Rule)		50
10.6 Optimisation : Extremums locaux et points selles		51
A Formulaire compact		54
B Cercle Trigonométrique et Valeurs Remarquables		56
C Fonctions Trigonométriques		57
C.1 1. Sinus (sin)		57
C.2 2. Cosinus (cos)		57
C.3 3. Tangente (tan)		58
C.4 4. Cotangente (cot)		58
C.5 5. Sécante (sec)		58
C.6 6. Cosécante (csc)		59
D Fonctions Trigonométriques Réciproques		59
D.1 1. Arcsinus (arcsin)		59
D.2 2. Arccosinus (arccos)		60
D.3 3. Arctangente (arctan)		60
E Fonctions Hyperboliques		61
E.1 1. Sinus hyperbolique (sinh)		61
E.2 2. Cosinus hyperbolique (cosh)		61
E.3 3. Tangente hyperbolique (tanh)		62
F Fonctions Hyperboliques Réciproques		62
F.1 1. Argument sinus hyperbolique (arsinh)		62
F.2 2. Argument cosinus hyperbolique (arcosh)		63
F.3 3. Argument tangente hyperbolique (artanh)		63
G Fonctions Exponentielles et Logarithmiques		64
G.1 1. Exponentielle naturelle (e^x)		64
G.2 2. Logarithme népérien (ln)		64
G.3 3. Exponentielle de base a (a^x avec $a > 0, a \neq 1$)		65
G.4 4. Logarithme de base a ($\log_a(x)$ avec $a > 0, a \neq 1$)		65
G.5 5. Fonction x^x		65
H Tableau Récapitulatif des Dérivées		66

1 Préliminaires

Examen : ~20%

1.1 Moyennes

Définition : Moyennes d'un ensemble de nombres positifs $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$

— Moyenne arithmétique (AM) :

$$\text{AM} = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$$

— Moyenne géométrique (GM) :

$$\text{GM} = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdots a_n}$$

— Moyenne harmonique (HM) :

$$\text{HM} = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}}$$

Théorème : Inégalité AM-GM-HM

Pour tous $a, b > 0$:

$$\underbrace{\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}}_{\text{HM}} \leq \underbrace{\sqrt{ab}}_{\text{GM}} \leq \underbrace{\frac{a+b}{2}}_{\text{AM}}$$

avec égalité si et seulement si $a = b$.

Généralisation (n termes) : $\text{HM} \leq \text{GM} \leq \text{AM}$.

1.2 Inégalités

Théorème : Inégalité triangulaire

Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$:

$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

Généralisation : $\left| \sum_{k=1}^n a_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |a_k|$

Inégalité triangulaire inverse : $||a| - |b|| \leq |a - b|$

1.3 Ensembles : Bornes et Extrema

Définition : Maximum, minimum, bornes, supremum, infimum

Soit $S \subseteq \mathbb{R}$ un ensemble non vide.

- $M = \max S \Leftrightarrow M \in S$ et $\forall x \in S, x \leq M$
- $m = \min S \Leftrightarrow m \in S$ et $\forall x \in S, x \geq m$
- k est une **borne supérieure** de S si $\forall x \in S, x \leq k$
- k est une **borne inférieure** de S si $\forall x \in S, x \geq k$
- $\sup S$ = la **plus petite** borne supérieure (*least upper bound*)
- $\inf S$ = la **plus grande** borne inférieure (*greatest lower bound*)

✓ Astuce : Relations entre max, sup, min, inf

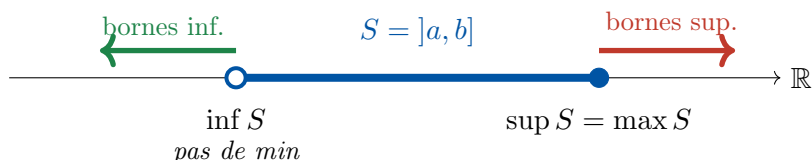
- Si $\max S$ existe, alors $\sup S = \max S$ (le sup est atteint).
- Si $\min S$ existe, alors $\inf S = \min S$.
- Le sup/inf peut exister même si le max/min n'existe pas.
- Un ensemble fini possède toujours un max et un min.

► Procédure : Trouver le supremum / infimum d'un ensemble

1. **Conjecturer** la valeur de $\sup S$ (ou $\inf S$) en inspectant S .
2. **Montrer que c'est une borne supérieure** : prouver que $\forall x \in S, x \leq M$.
3. **Montrer que c'est la plus petite** : prouver que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists x \in S : x > M - \varepsilon$$

(autrement dit, on peut s'approcher aussi près qu'on veut de M par des éléments de S).

**× Piège : Confondre borne supérieure et supremum**

- Une **borne supérieure** est *n'importe quel* nombre $\geq$ tous les éléments de S . Il y en a une infinité.
- Le **supremum** est la *plus petite* borne supérieure. Il est **unique**.
- Le supremum n'est **pas toujours** un élément de S .

2 Suites

Examen : ~30%

2.1 Convergence

Définition : Convergence d'une suite

La suite $\{a_n\}$ **converge** vers $L \in \mathbb{R}$ si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N, |a_n - L| < \varepsilon$$

On écrit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$.

Si la suite ne converge pas, elle **diverge**.

Théorème : Propriétés fondamentales

Soient $\{a_n\} \rightarrow a$ et $\{b_n\} \rightarrow b$. Alors :

- $a_n + b_n \rightarrow a + b$
- $a_n \cdot b_n \rightarrow a \cdot b$
- $k \cdot a_n \rightarrow k \cdot a$
- $a_n/b_n \rightarrow a/b$ (si $b \neq 0$)
- Convergente $\Rightarrow$ bornée
- Bornée + monotone $\Rightarrow$ convergente

Théorème : Théorème du sandwich (de l'étau)

Si $\forall n > N, a_n \leq b_n \leq c_n$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = L$, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = L$.

2.2 Suites particulières

Type	Relation	Convergence	Somme partielle ($S_n = \sum_{k=1}^n u_k$)
Arithmétique	$u_{n+1} = u_n + r$	Diverge (sauf $r = 0$)	$S_n = \frac{n}{2}(u_1 + u_n)$
Géométrique	$u_{n+1} = u_n \cdot q$	$ q < 1 \Rightarrow$ conv. vers 0	$S_n = u_1 \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ (si $q \neq 1$)

Définition : Suite de Cauchy

$\{a_n\}$ est de Cauchy si : $\forall \varepsilon > 0, \exists N : \forall n, m > N, |a_n - a_m| < \varepsilon$

Dans $\mathbb{R}$: suite de Cauchy $\Leftrightarrow$ suite convergente.

2.3 Procédures de résolution

► Procédure : Prouver qu'une suite converge vers L par la définition ε - N

1. Fixer $\varepsilon > 0$ arbitraire.
2. Écrire $|a_n - L|$ et simplifier/majorer.
3. **Travail au brouillon** : résoudre $|a_n - L| < \varepsilon$ pour trouver $n > f(\varepsilon)$.
4. **Rédaction propre** : poser $N = \lceil f(\varepsilon) \rceil$ et montrer que $n > N \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon$.

Exemple : Prouver que $a_n = \frac{3n+1}{n+2} \rightarrow 3$

Preuve : Soit $\varepsilon > 0$. On calcule :

$$|a_n - 3| = \left| \frac{3n+1}{n+2} - 3 \right| = \left| \frac{3n+1-3(n+2)}{n+2} \right| = \left| \frac{-5}{n+2} \right| = \frac{5}{n+2}$$

On veut $\frac{5}{n+2} < \varepsilon$, soit $n > \frac{5}{\varepsilon} - 2$.

Posons $N = \left\lceil \frac{5}{\varepsilon} - 2 \right\rceil$. Pour tout $n > N$:

$$|a_n - 3| = \frac{5}{n+2} < \frac{5}{N+2} \leq \varepsilon \quad \square$$

► **Procédure : Prouver la convergence d'une suite récurrente $a_{n+1} = f(a_n)$**

1. **Monotonie** : étudier le signe de $a_{n+1} - a_n$ (ou montrer par récurrence).
2. **Bornitude** : montrer par récurrence que a_n reste dans un intervalle $[m, M]$.
3. **Conclure** : par le théorème des suites monotones bornées, $\{a_n\}$ converge.
4. **Trouver la limite** : si $a_n \rightarrow L$, alors $a_{n+1} \rightarrow L$ aussi.
Passer à la limite dans $a_{n+1} = f(a_n)$: $L = f(L)$.
Résoudre cette équation de point fixe.
5. **Sélectionner** la solution compatible avec l'intervalle $[m, M]$.

► **Procédure : Prouver qu'une suite diverge**

Méthode 1 — Sous-suites : Trouver deux sous-suites $\{a_{n_k}\}$ et $\{a_{m_k}\}$ convergeant vers des limites différentes. Puisque toute sous-suite d'une suite convergente converge vers la même limite, la suite diverge.

Méthode 2 — Négation de la définition : Trouver un $\varepsilon_0 > 0$ tel que $\forall N, \exists n > N$: $|a_n - L| \geq \varepsilon_0$ pour tout L candidat.

Méthode 3 — Suite non bornée : Montrer que $|a_n| \rightarrow \infty$.

× **Piège : Convergence des suites**

- Bornée $\nrightarrow$ convergente ! (ex : $a_n = (-1)^n$)
- Convergente + divergente = **divergente** (la divergence "l'emporte")
- Divergente + divergente = **indéterminé** (peut converger !)
- Ne pas confondre limite de *suite* et limite de *fonction*.

3 Séries numériques

Examen : ~100%

Définition : Série

La **série** de terme général a_n est la suite des **sommes partielles** :

$$S_N = \sum_{n=1}^N a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_N$$

La série $\sum a_n$ **converge** si et seulement si la suite $\{S_N\}$ converge. On note alors $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{N \rightarrow \infty} S_N$.

3.1 Séries de référence

Série	Converge si	Valeur / remarque
Géométrique $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$	$ q < 1$	$\frac{1}{1-q}$
Riemann $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$	$\alpha > 1$	(pas de formule fermée en général)
Harmonique $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$	diverge	(cas $\alpha = 1$)
Télescopique $\sum (b_n - b_{n+1})$	si $b_n \rightarrow L$	$b_1 - L$

3.2 Convergence absolue et conditionnelle

Définition : Convergence absolue et conditionnelle

- $\sum a_n$ converge **absolument** si $\sum |a_n|$ converge.
- $\sum a_n$ converge **conditionnellement** si $\sum a_n$ converge mais $\sum |a_n|$ diverge.

Convergence absolue $\implies$ Convergence

La réciproque est **fausse** ! (ex : série harmonique alternée).

3.3 Critères de convergence

Théorème : Condition nécessaire (test du terme général)

Si $\sum a_n$ converge, alors $a_n \rightarrow 0$.

Contraposée : si $a_n \not\rightarrow 0$, alors $\sum a_n$ **diverge**.

Attention : $a_n \rightarrow 0$ n'implique **pas** la convergence ! ($\sum 1/n$ diverge).

Exemple : Exemple : Condition nécessaire

Montrer que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{1}{n}\right)$ diverge.

Solution : On calcule la limite du terme général :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \cos\left(\frac{1}{n}\right) = \cos(0) = 1 \neq 0$$

Le terme général ne tend pas vers zéro, la série diverge.

Théorème : Critère de comparaison

Soient $0 \leq a_n \leq b_n$ pour tout n assez grand.

- Si $\sum b_n$ converge, alors $\sum a_n$ converge.
- Si $\sum a_n$ diverge, alors $\sum b_n$ diverge.

Exemple : Exemple : Comparaison directe

Déterminer la nature de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(n)}{2^n}$.

Solution : Pour tout n , on a $0 \leq \sin^2(n) \leq 1$. On peut donc majorer le terme général :

$$0 \leq \frac{\sin^2(n)}{2^n} \leq \frac{1}{2^n}$$

Or, $\sum \frac{1}{2^n}$ est une série géométrique de raison $q = 1/2 < 1$, qui converge. Par comparaison directe, notre série converge.

Théorème : Critère de comparaison par limite

Soient $a_n, b_n > 0$ et $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$.

- Si $0 < L < \infty$: $\sum a_n$ et $\sum b_n$ ont la **même nature**.
- Si $L = 0$: $\sum b_n$ converge $\Rightarrow \sum a_n$ converge.
- Si $L = \infty$: $\sum b_n$ diverge $\Rightarrow \sum a_n$ diverge.

Exemple : Exemple : Comparaison par limite (Examen août 2025)

La série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2}$ converge-t-elle ?

Solution : On observe les puissances dominantes du numérateur et du dénominateur pour trouver une série de comparaison :

$$a_n = \frac{n+1}{n^2} \sim \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n} \quad (n \rightarrow \infty)$$

On pose donc $b_n = 1/n$. On calcule la limite du rapport :

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n+1}{n^2}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + n}{n^2} = 1 \in]0, \infty[$$

Les deux séries ont donc la même nature. Comme la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ diverge (Riemann avec $\alpha = 1 \not> 1$), la série $\sum \frac{n+1}{n^2}$ **diverge**.

Théorème : Critère de D'Alembert (rapport)

Soit $a_n > 0$ et $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

- $L < 1$: $\sum a_n$ **converge** (absolument).
- $L > 1$: $\sum a_n$ **diverge**.
- $L = 1$: **indéterminé** (le test ne conclut pas).

Exemple : Exemple : Critère de D'Alembert

Étudier la convergence de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$.

Solution : On applique le critère du rapport :

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n+1} = 0$$

Comme $L = 0 < 1$, la série converge absolument.

Théorème : Critère de Cauchy (racine)

Soit $L = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$.

- $L < 1$: $\sum a_n$ converge absolument.
- $L > 1$: $\sum a_n$ diverge.
- $L = 1$: indéterminé.

Exemple : Exemple : Critère de Cauchy

Étudier la convergence de $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{3n+2} \right)^n$.

Solution : Le terme général est à la puissance n , on utilise la racine n -ième :

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{3n+2} = \frac{2}{3}$$

Comme $L = 2/3 < 1$, la série converge absolument.

Théorème : Critère de Leibniz (séries alternées)

Si $\{a_n\}$ est une suite **décroissante** de nombres **positifs** telle que $a_n \rightarrow 0$, alors :

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n \quad \text{converge.}$$

De plus, l'erreur de troncature satisfait $|R_N| \leq a_{N+1}$.

Exemple : Exemple : Critère de Leibniz

La série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\ln(n+1)}$ converge-t-elle absolument ou conditionnellement ?

Solution :

1. **Convergence absolue :** $\sum |a_n| = \sum \frac{1}{\ln(n+1)}$. Comme $\ln(n+1) < n+1$, $\frac{1}{\ln(n+1)} > \frac{1}{n+1}$. Or $\sum \frac{1}{n+1}$ diverge (harmonique). Donc pas de convergence absolue.
2. **Leibniz :** La suite $1/\ln(n+1)$ est positive, décroissante et tend vers zéro. Donc la série converge par Leibniz.

Conclusion : Convergence conditionnelle.

► Procédure : Résolution des Séries télescopiques

Si le terme a_n peut s'écrire sous la forme d'une différence $f(n) - f(n+p)$ pour un certain entier p , la série est **télescopique**. La somme partielle S_N se simplifie massivement (les termes intermédiaires s'annulent deux à deux).

Marche à suivre :

1. **Décomposer** a_n en fractions partielles si nécessaire.
2. **Écrire explicitement** les premiers et derniers termes de la somme partielle $S_N = \sum_{n=1}^N a_n$.
3. **Barrer** les termes qui s'annulent. Il ne restera généralement que p termes au début et p termes à la fin.
4. **Calculer la limite** $\lim_{N \rightarrow \infty} S_N$ pour obtenir la valeur exacte de la somme infinie.

Exemple : Exemple : Série télescopique (Interro S6 2023)

Énoncé : Calculez la valeur exacte de $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right)$.

Résolution : C'est une série télescopique avec un décalage de $p = 2$. On écrit la somme partielle S_N :

$$\begin{aligned} S_N &= \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right) \\ &= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{N-1} - \frac{1}{N+1} \right) + \left(\frac{1}{N} - \frac{1}{N+2} \right) \end{aligned}$$

On remarque que tous les termes s'annulent sauf les deux premiers termes positifs ($\frac{1}{1}$ et $\frac{1}{2}$) et les deux derniers termes négatifs ($-\frac{1}{N+1}$ et $-\frac{1}{N+2}$). Donc :

$$S_N = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{N+1} - \frac{1}{N+2} = \frac{3}{2} - \frac{1}{N+1} - \frac{1}{N+2}$$

On passe à la limite lorsque $N \rightarrow \infty$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right) = \lim_{N \rightarrow \infty} S_N = \frac{3}{2} - 0 - 0 = \boxed{\frac{3}{2}}$$

Théorème : Test intégral

Soit $f : [1, \infty[\rightarrow \mathbb{R}^+$ continue, positive et décroissante. Alors :

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \text{ converge} \iff \int_1^{\infty} f(x) dx \text{ converge.}$$

Exemple : Exemple : Test intégral (Examen blanc déc. 2018)

Déterminer si la série $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \ln k}$ converge.

Solution : La fonction $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$ est positive, continue et décroissante sur $[2, \infty[$. On calcule l'intégrale impropre :

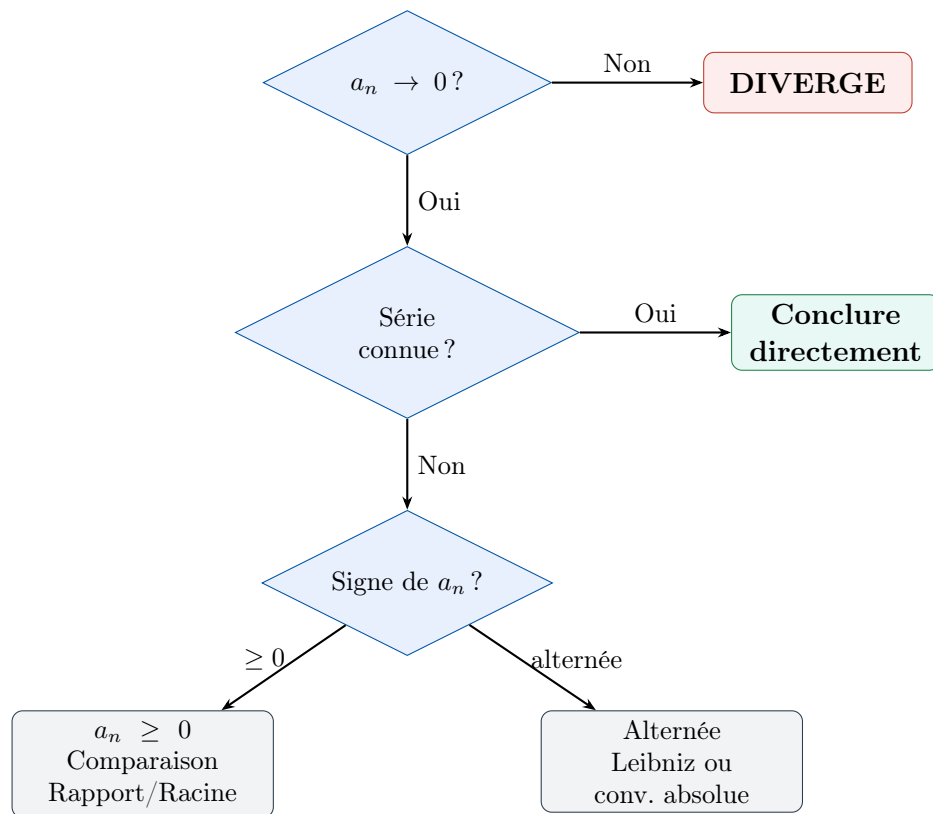
$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x \ln x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\ln(\ln(x)) \right]_2^b = \lim_{b \rightarrow \infty} (\ln(\ln(b)) - \ln(\ln(2))) = +\infty$$

Puisque l'intégrale diverge, par le test intégral, la série diverge également.

3.4 Algorithme de résolution

► Procédure : Déterminer la nature d'une série $\sum a_n$ (arbre de décision)

1. **Test du terme général :** $a_n \rightarrow 0$? Si non $\Rightarrow$ **diverge**. Stop.
2. **Reconnaître une série connue :**
 - Géométrique $\sum q^n \rightarrow$ converge ssi $|q| < 1$
 - Riemann $\sum 1/n^\alpha \rightarrow$ converge ssi $\alpha > 1$
 - Télescopique $\rightarrow$ écrire S_N et passer à la limite
3. **Série à termes positifs** ($a_n \geq 0$) :
 - Présence de $n!$ ou $a^n \rightarrow$ **rapport** (D'Alembert)
 - Présence de $(\cdot)^n \rightarrow$ **racine** (Cauchy)
 - Forme rationnelle en $n \rightarrow$ **comparaison par limite** avec $1/n^\alpha$
 - Dernier recours $\rightarrow$ **test intégral**
4. **Série alternée** ($(-1)^n a_n$ avec $a_n > 0$) :
 - Tester la **convergence absolue** ($\sum |a_n|$) d'abord.
 - Si $\sum |a_n|$ diverge $\rightarrow$ appliquer **Leibniz** pour la convergence conditionnelle.
5. **Série de signe quelconque :**
 - Tester la **convergence absolue**.



3.5 Séries entières et rayon de convergence

Définition : Série entière

Une série entière est une série de la forme :

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

ou plus généralement $\sum a_n (x - c)^n$ (centrée en c).

► Procédure : Calculer le rayon de convergence R

1. Critère de D'Alembert :

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \quad \Rightarrow \quad R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

2. Critère de Cauchy-Hadamard : $\frac{1}{R} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$

3. La série converge **absolument** pour $|x| < R$ et **diverge** pour $|x| > R$.

4. **Aux bords** $x = \pm R$: **étudier séparément** (substituer et appliquer les critères de la section précédente).

× Piège : Rayon de convergence — erreurs classiques

- Ne pas oublier d'étudier $x = \pm R$ séparément !
- Si $a_n = 0$ pour certains n (ex : $\sum x^{2n}$), il faut poser $y = x^2$ et adapter.
- $R = 0 \Rightarrow$ converge **uniquement** en $x = 0$.

— $R = \infty \Rightarrow$ converge pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exemple : Exemple : Rayon de convergence (Examen juin 2019)

Trouver l'ensemble de convergence de $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-2)^k}{k} x^k$.

Solution : On trouve d'abord le rayon de convergence par D'Alembert :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{(-2)^{k+1} x^{k+1}}{k+1} \cdot \frac{k}{(-2)^k x^k} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} 2|x| \frac{k}{k+1} = 2|x|$$

La série converge si $2|x| < 1 \iff |x| < 1/2$. Le rayon est $R = 1/2$.

Étude aux bornes :

- En $x = -1/2$: La série devient $\sum \frac{(-2)^k}{k} (-1/2)^k = \sum \frac{1}{k}$ (Série harmonique $\rightarrow$ diverge).
- En $x = 1/2$: La série devient $\sum \frac{(-2)^k}{k} (1/2)^k = \sum \frac{(-1)^k}{k}$ (Harmonique alternée $\rightarrow$ converge par Leibniz).

Conclusion : L'ensemble de convergence est $x \in]-1/2, 1/2]$.

Exemple : Exemple : Convergence absolue et comparaison (type examen)

La série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + 3n}$ converge-t-elle absolument ?

Solution :

$$|a_n| = \frac{1}{n^2 + 3n} \sim \frac{1}{n^2} \quad (n \rightarrow \infty)$$

Or $\sum 1/n^2$ converge (Riemann, $\alpha = 2 > 1$). Par comparaison par limite :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1/(n^2 + 3n)}{1/n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^2 + 3n} = 1 \in]0, \infty[$$

Même nature $\Rightarrow \sum |a_n|$ converge $\Rightarrow \sum a_n$ **converge absolument**.

4 Nombres complexes

Examen : ~70%

4.1 Définitions et Formes

Définition : Formes d'un nombre complexe

Un nombre complexe $z \in \mathbb{C}$ peut s'écrire sous plusieurs formes :

- **Forme algébrique** : $z = a + ib$ (où $a, b \in \mathbb{R}$ et $i^2 = -1$).
 - $a = \operatorname{Re}(z)$ (partie réelle)
 - $b = \operatorname{Im}(z)$ (partie imaginaire)
 - Conjugué : $\bar{z} = a - ib$
- **Forme polaire / exponentielle** : $z = r(\cos \theta + i \sin \theta) = re^{i\theta}$.
 - Module : $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z\bar{z}}$
 - Argument : $\theta = \operatorname{Arg}(z)$ (défini modulo 2π)

Théorème : Propriétés fondamentales

- $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$ et $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$
- $\operatorname{Arg}(z_1 z_2) = \operatorname{Arg}(z_1) + \operatorname{Arg}(z_2) \pmod{2\pi}$
- $\operatorname{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \operatorname{Arg}(z_1) - \operatorname{Arg}(z_2) \pmod{2\pi}$
- Formule de Moivre : $(e^{i\theta})^n = (\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta) = e^{in\theta}$
- Formules d'Euler : $\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$
- Identité d'Euler : $e^{i\pi} + 1 = 0$ (soit $e^{i\pi} = -1$)
- Valeurs remarquables : $e^{i\pi/2} = i$, $e^{-i\pi/2} = -i$, $e^{2i\pi} = 1$

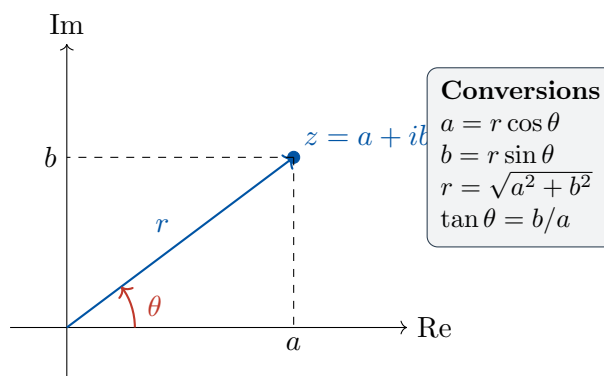
Théorème : Inégalité triangulaire complexe

Pour tous $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$:

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \quad \text{et} \quad ||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|$$

Théorème : Produit des diagonales d'un polygone régulier

Le produit des longueurs des segments reliant un sommet d'un polygone régulier à n côtés inscrit dans un cercle de rayon 1 à tous ses autres sommets est exactement égal à n . (Se démontre en factorisant $z^n - 1 = (z - 1)(z - z_1) \dots (z - z_{n-1})$ et en évaluant en $z = 1$).



4.2 Procédures de résolution

► Procédure : Division par conjugué (Calcul cartésien)

Pour diviser deux nombres complexes ou se débarrasser des i au dénominateur, il faut multiplier le numérateur et le dénominateur par le conjugué du dénominateur :

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{|z_2|^2}$$

Cette astuce est indispensable pour exprimer le résultat sous forme algébrique $a + ib$.

► Procédure : Quand utiliser la forme polaire vs algébrique ?

Privilégier la **forme polaire** ($re^{i\theta}$) pour :

- **Puissances** z^n : toujours passer en polaire ! ($z^n = r^n e^{in\theta}$)
- **Racines n -ièmes** : obligatoirement en polaire.
- **Condition « z^n est réel »** : l'argument doit être un multiple de π ($n\theta = k\pi$).
- **Multiplications et divisions** répétées (produit des modules, somme des arguments).

Privilégier la **forme algébrique** ($a + ib$) pour :

- **Additions et soustractions** de complexes.
- **Résolutions d'équations avec $\bar{z}$** (on pose $z = x + iy$).

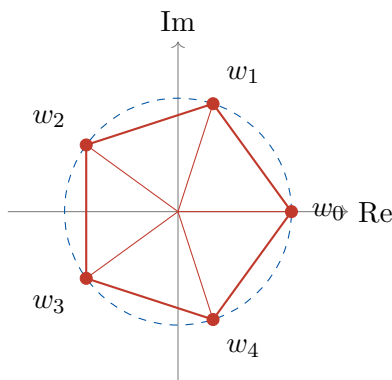
► Procédure : Calculer les racines n -ièmes d'un complexe z

Les racines n -ièmes d'un complexe $z = re^{i\theta}$ sont les solutions de l'équation $w^n = z$. Il y a exactement n solutions distinctes.

1. Mettre z sous forme polaire : $z = re^{i\theta}$.
2. Appliquer la formule des racines :

$$w_k = \sqrt[n]{r} e^{i\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)} \quad \text{pour } k = 0, 1, \dots, n-1$$

3. **Interprétation géométrique** : Les racines forment un polygone régulier à n côtés inscrit dans un cercle de rayon $\sqrt[n]{r}$, centré à l'origine.



Racines 5-ièmes de 1 ($z = 1, r = 1, \theta = 0$)

Théorème : Propriétés des racines n -ièmes de l'unité

Les n solutions de $z^n = 1$ sont notées $w_k = e^{2ik\pi/n}$ pour $k = 0, \dots, n-1$. En posant $w_1 = e^{2i\pi/n}$ (la racine primitive), on a la relation $w_k = (w_1)^k$.

— **Somme nulle** : $\sum_{k=0}^{n-1} w_k = 0$

— **Factorisation** : $z^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1} (z - w_k) = (z - 1)(z^{n-1} + z^{n-2} + \dots + 1)$

— **Produit des diagonales** : $\prod_{k=1}^{n-1} |1 - w_k| = n$

Exemple : Calcul exact de $\cos(\pi/5)$ via les racines de l'unité (Interro S6 2022)

Énoncé : En utilisant les propriétés des racines 5-ièmes de l'unité $w = e^{2i\pi/5}$, déterminez la valeur de $\cos(\pi/5)$.

Résolution : Les racines 5-ièmes de l'unité vérifient $1 + w + w^2 + w^3 + w^4 = 0$. Posons $a = w + w^4$ et $b = w^2 + w^3$. On remarque que $w^4 = \bar{w}$ (car $w^5 = 1$), donc $a = w + \bar{w} = 2 \operatorname{Re}(w) = 2 \cos(2\pi/5)$. Calculons leur somme et leur produit :

— Somme : $a + b = w + w^2 + w^3 + w^4 = -1$.

— Produit : $ab = (w + w^4)(w^2 + w^3) = w^3 + w^4 + w^6 + w^7$. Comme $w^5 = 1$, on a $w^6 = w$ et $w^7 = w^2$. Donc $ab = w^3 + w^4 + w + w^2 = -1$.

Les nombres a et b sont donc les solutions de l'équation du second degré $Z^2 - (a+b)Z + ab = 0$, soit $Z^2 + Z - 1 = 0$. Les solutions sont $Z = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Puisque l'angle est $2\pi/5 < \pi/2$, le cosinus est positif, donc $a = 2 \cos(2\pi/5) > 0$. Ainsi :

$$2 \cos(2\pi/5) = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \implies \cos(2\pi/5) = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}$$

On cherche $\cos(\pi/5)$. On utilise la formule de duplication $\cos(2\theta) = 2 \cos^2 \theta - 1$:

$$2 \cos^2(\pi/5) - 1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4} \implies 2 \cos^2(\pi/5) = \frac{3 + \sqrt{5}}{4} \implies \cos^2(\pi/5) = \frac{6 + 2\sqrt{5}}{16}$$

On remarque que $6 + 2\sqrt{5} = (1 + \sqrt{5})^2$. Donc en prenant la racine positive : $\cos(\pi/5) = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$.

► Procédure : Résoudre un problème de géométrie complexe

Souvent, on demande de trouver les conditions pour qu'un triangle soit isocèle, équilatéral, ou rectangle.

1. Traduire la géométrie en algèbre :

— Distance entre $A(z_A)$ et $B(z_B)$: $AB = |z_B - z_A|$

— Angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$: $\operatorname{Arg} \left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \right)$

2. Conditions typiques :

— Triangle ABC équilatéral : $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{\pm i\pi/3}$

— Triangle rectangle en A : $\operatorname{Re} \left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \right) = 0$ (rapport imaginaire pur)

— Alignement de A, B, C : $\operatorname{Im} \left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \right) = 0$ (rapport réel)

► Procédure : Montrer qu'une expression est réelle ou imaginaire pure

Soit une expression complexe Z .

1. **Pour montrer que $Z \in \mathbb{R}$:**

- Prouver que $\bar{Z} = Z$
- Ou prouver que $\operatorname{Im}(Z) = 0$
- Ou montrer que $\operatorname{Arg}(Z) = k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)

2. **Pour montrer que $Z \in i\mathbb{R}$ (imaginaire pur) :**

- Prouver que $\bar{Z} = -Z$
- Ou prouver que $\operatorname{Re}(Z) = 0$
- Ou montrer que $\operatorname{Arg}(Z) = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)

Exemple : Montrer que $Z = \left(\frac{1+i}{1-i} \right)^n$ est réel (type examen)

Résolution : 1. Convertir en forme polaire.

Le numérateur $1 + i = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$.

Le dénominateur $1 - i = \sqrt{2}e^{-i\pi/4}$.

2. Simplifier la fraction :

$$\frac{1+i}{1-i} = \frac{\sqrt{2}e^{i\pi/4}}{\sqrt{2}e^{-i\pi/4}} = e^{i(\pi/4 - (-\pi/4))} = e^{i\pi/2} = i$$

3. Élever à la puissance n :

$$Z = i^n$$

Cette expression est réelle si et seulement si n est pair (soit $n = 2k$, d'où $i^{2k} = (i^2)^k = (-1)^k \in \mathbb{R}$).

► Procédure : Intersection entre 2 cercles complexes (Formule bonus)

Pour trouver l'intersection de deux cercles dans le plan complexe définis par :

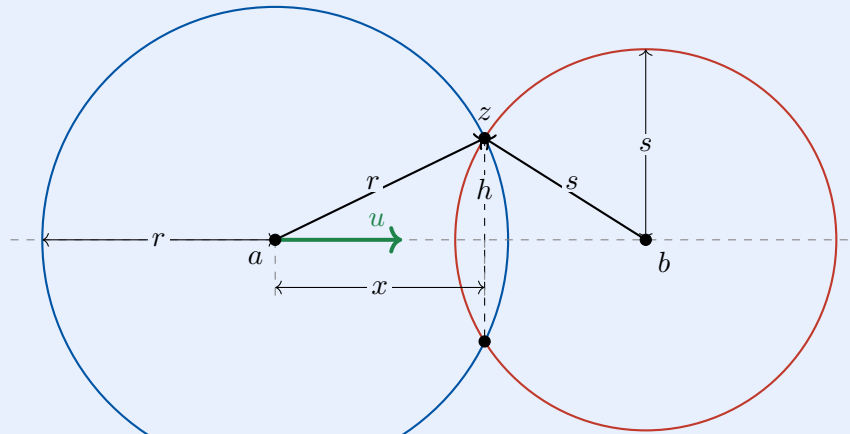
$$|z - a| = r \quad \text{et} \quad |z - b| = s \quad (a, b \in \mathbb{C}; r, s > 0)$$

On calcule successivement :

$$\begin{aligned} d &= |b - a| \\ u &= \frac{b - a}{d} \\ x &= \frac{d^2 + r^2 - s^2}{2d} \\ h &= \sqrt{r^2 - x^2} \end{aligned}$$

Les points d'intersection z vérifient alors :

$$\iff z = a + xu \pm ihu$$



✓ Astuce : Propriétés utiles des conjugués et modules

En géométrie complexe et pour simplifier des expressions, ces relations algébriques sont fondamentales :

- $z\bar{z} = |z|^2$
- $|zw|^2 = (z\bar{z})(w\bar{w})$
- $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$
- $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$
- $\overline{z^n} = (\bar{z})^n$
- $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$
- $z + \bar{z} = 2\operatorname{Re}(z)$
- $z - \bar{z} = 2i\operatorname{Im}(z)$

Exemple : Calcul de $\cosh(\ln 2 + i\pi)$ (Examen blanc déc. 2018)

Énoncé : Calculez la valeur de $\cosh x$ pour $x = \ln(2) + i\pi$ et simplifiez au maximum.

Résolution : On utilise la définition $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ et la propriété $e^{u+v} = e^u e^v$:

$$\cosh(\ln 2 + i\pi) = \frac{e^{\ln 2 + i\pi} + e^{-\ln 2 - i\pi}}{2} = \frac{e^{\ln 2} e^{i\pi} + e^{-\ln 2} e^{-i\pi}}{2}$$

Or $e^{i\pi} = \cos(\pi) + i\sin(\pi) = -1$ et $e^{-i\pi} = -1$ également. Donc :

$$\cosh(\ln 2 + i\pi) = \frac{2 \cdot (-1) + \frac{1}{2} \cdot (-1)}{2} = \frac{-2 - 1/2}{2} = \boxed{-\frac{5}{4}}$$

Exemple : Transformation complexe : image du cercle unité (Examen juin 2025)

Énoncé : Soit $Z(z) = z + \frac{\lambda}{z}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}^+$. Calculez l'image du cercle unité $|z| = 1$ par Z .

Résolution : Sur le cercle unité, on a $z = e^{i\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi[$. On substitue :

$$Z(e^{i\theta}) = e^{i\theta} + \lambda e^{-i\theta} = (\cos \theta + i \sin \theta) + \lambda(\cos \theta - i \sin \theta)$$

En séparant parties réelle et imaginaire :

$$\operatorname{Re}(Z) = (1 + \lambda) \cos \theta, \quad \operatorname{Im}(Z) = (1 - \lambda) \sin \theta$$

C'est l'équation paramétrique d'une **ellipse** centrée à l'origine, de demi-axes $|1 + \lambda|$ (axe Ox) et $|1 - \lambda|$ (axe Oy). Lorsque $\lambda = 1$, l'ellipse dégénère en un segment $[-2, 2]$.

Exemple : Triangle équilatéral dans le plan complexe (Examen juin 2024)

Énoncé : Trouvez tous les $z \in \mathbb{C}$ tels que $z_1 = i$, $z_2 = z$ et $z_3 = iz$ forment un triangle équilatéral.

Résolution détaillée :

Étape 0 — Propriétés complexes utilisées.

- **Distance :** la distance entre deux points $A(z_A)$ et $B(z_B)$ du plan complexe est $|z_B - z_A|$.
- **Module au carré par le conjugué :** $|w|^2 = w\bar{w}$ pour tout $w \in \mathbb{C}$.
- **Identités du conjugué :** $\overline{a + ib} = a - ib$, $z - \bar{z} = 2i \operatorname{Im}(z)$, $z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re}(z)$.
- **Module d'un produit :** $|wz| = |w| |z|$, en particulier $|iz| = |i| |z| = |z|$.
- **Factorisation :** $|z - iz| = |z(1 - i)| = |z| |1 - i|$.

Étape 1 — Poser les conditions. Un triangle équilatéral a ses trois côtés de même longueur. Les trois côtés sont :

$$\underbrace{|z_2 - z_1|}_{\text{côté 1}} = |z - i|, \quad \underbrace{|z_3 - z_2|}_{\text{côté 2}} = |iz - z|, \quad \underbrace{|z_3 - z_1|}_{\text{côté 3}} = |iz - i|$$

La condition est donc :

$$|z - i| = |z - iz| = |iz - i|$$

Étape 2 — Première condition : $|z - i|^2 = |z - iz|^2$.

On passe au carré (car les modules sont positifs) et on utilise $|w|^2 = w\bar{w}$:

Côté gauche :

$$\begin{aligned} |z - i|^2 &= (z - i)\overline{(z - i)} = (z - i)(\bar{z} + i) \quad (\text{car } \overline{-i} = +i) \\ &= z\bar{z} + iz - i\bar{z} - i^2 \\ &= |z|^2 + i \underbrace{(z - \bar{z})}_{=2i \operatorname{Im}(z)=2ib} + 1 \\ &= |z|^2 + i(2ib) + 1 = |z|^2 - 2b + 1 \end{aligned}$$

Côté droit : on factorise d'abord $z - iz = z(1 - i)$, d'où :

$$|z - iz|^2 = |z|^2 |1 - i|^2 = |z|^2 \cdot (1^2 + (-1)^2) = 2|z|^2$$

En égalant :

$$|z|^2 - 2b + 1 = 2|z|^2 \implies \boxed{|z|^2 = 1 - 2b}$$

Étape 3 — Deuxième condition : $|iz - i|^2 = |z - iz|^2$.

Côté gauche : on factorise $iz - i = i(z - 1)$, d'où :

$$\begin{aligned} |iz - i|^2 &= |i|^2 |z - 1|^2 = 1 \cdot (z - 1)\overline{(z - 1)} = (z - 1)(\bar{z} - 1) \\ &= z\bar{z} - z - \bar{z} + 1 = |z|^2 - \underbrace{(z + \bar{z})}_{=2 \operatorname{Re}(z)=2a} + 1 = |z|^2 - 2a + 1 \end{aligned}$$

Le côté droit est le même qu'avant : $2|z|^2$. En égalant :

$$|z|^2 - 2a + 1 = 2|z|^2 \implies \boxed{|z|^2 = 1 - 2a}$$

Étape 4 — Résolution du système.

Des étapes 2 et 3 :

$$1 - 2b = 1 - 2a \implies \boxed{a = b}$$

On substitue $a = b$ dans $|z|^2 = a^2 + b^2 = 2a^2$ et dans la relation $|z|^2 = 1 - 2a$:

$$2a^2 = 1 - 2a \implies 2a^2 + 2a - 1 = 0$$

Par la formule quadratique ($\Delta = 4 + 8 = 12$) :

$$a = \frac{-2 \pm \sqrt{12}}{4} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{3}}{4} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}$$

Conclusion : Comme $a = b$, les deux solutions sont :

$$z_1 = \frac{-1 + \sqrt{3}}{2}(1 + i) \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-1 - \sqrt{3}}{2}(1 + i)$$

Vérification rapide : Pour z_1 , on a $a = b = \frac{-1 + \sqrt{3}}{2} \approx 0,37$, donc $|z|^2 = 2a^2 \approx 0,27$ et $1 - 2a \approx 0,27$ ✓.

Exemple : Somme $\sum_{k=0}^{99} \cos(k\theta)$ via les complexes (Examen juin 2019)

Énoncé : Calculez $\sum_{k=0}^{99} \cos(k\theta)$ en fonction de θ .

Résolution détaillée :

Étape 0 — Propriétés complexes utilisées.

- **Formule d'Euler :** $e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha$, d'où $\cos(k\theta) = \operatorname{Re}(e^{ik\theta})$.
- **Série géométrique finie :** pour $q \neq 1$, $\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.
- **Linéarité de la partie réelle :** $\operatorname{Re}(z_1 + z_2) = \operatorname{Re}(z_1) + \operatorname{Re}(z_2)$.
- **Factorisation de demi-angle :** $e^{i\alpha} - 1 = e^{i\alpha/2}(e^{i\alpha/2} - e^{-i\alpha/2}) = 2i \sin(\alpha/2) \cdot e^{i\alpha/2}$.
- **Formule d'Euler pour le sinus :** $e^{i\alpha} - e^{-i\alpha} = 2i \sin \alpha$.

Étape 1 — Passer aux complexes. On utilise $\cos(k\theta) = \operatorname{Re}(e^{ik\theta})$ et la linéarité de Re :

$$S = \sum_{k=0}^n \cos(k\theta) = \operatorname{Re} \left(\sum_{k=0}^n e^{ik\theta} \right)$$

Il suffit donc de calculer la somme complexe $\sum_{k=0}^n e^{ik\theta}$ puis d'en extraire la partie réelle.

Étape 2 — Série géométrique complexe. En posant $q = e^{i\theta}$ (avec $\theta \neq 0 \pmod{2\pi}$, c'est-à-dire $q \neq 1$) :

$$\sum_{k=0}^n e^{ik\theta} = \sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \frac{1 - e^{i(n+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}}$$

Étape 3 — Factorisation par des demi-angles. L'astuce clé est de factoriser numérateur et dénominateur en utilisant l'identité $e^{i\alpha} - 1 = 2i \sin(\alpha/2) \cdot e^{i\alpha/2}$:

Numérateur :

$$1 - e^{i(n+1)\theta} = -(e^{i(n+1)\theta} - 1) = -2i \sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right) e^{i(n+1)\theta/2}$$

Dénominateur :

$$1 - e^{i\theta} = -(e^{i\theta} - 1) = -2i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\theta/2}$$

Étape 4 — Simplification du quotient. En divisant :

$$\frac{1 - e^{i(n+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}} = \frac{-2i \sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right) e^{i(n+1)\theta/2}}{-2i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\theta/2}} = \frac{\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \cdot e^{i\frac{n\theta}{2}}$$

(Les $-2i$ se simplifient, et $e^{i(n+1)\theta/2}/e^{i\theta/2} = e^{in\theta/2}$.)

Étape 5 — Extraction de la partie réelle. On prend $\operatorname{Re}(\cdot)$:

$$S = \operatorname{Re}\left(\frac{\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \cdot e^{in\theta/2}\right) = \frac{\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \cdot \cos\left(\frac{n\theta}{2}\right)$$

(Le rapport des sinus est réel, il sort de Re , et $\operatorname{Re}(e^{in\theta/2}) = \cos(n\theta/2)$.)

Étape 6 — Application avec $n = 99$. En substituant $n = 99$:

$$\boxed{\sum_{k=0}^{99} \cos(k\theta) = \frac{\sin(50\theta) \cdot \cos\left(\frac{99\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}}$$

Remarque : La formule est valable pour tout $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$. Quand $\theta = 0$, chaque terme vaut $\cos(0) = 1$ et la somme vaut trivialement 100.

Variante : Pour $\sum_{k=0}^n \sin(k\theta)$, on prend Im au lieu de Re , ce qui donne $\frac{\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$.

4.3 Cercle d'Apollonius

Définition : Cercle d'Apollonius

Étant donnés deux points complexes $a, b \in \mathbb{C}$ et un réel $k > 0$ avec $k \neq 1$, le lieu géométrique des points z tels que la distance à a est k fois la distance à b :

$$|z - a| = k |z - b|$$

est un **cercle**.

- Si $k = 1$, l'équation $|z - a| = |z - b|$ décrit simplement la **médiatrice** du segment $[a, b]$.
- Si $k \neq 1$, le cercle est centré au point $c = \frac{a - k^2 b}{1 - k^2}$ et son rayon est $R = \frac{k |a - b|}{|1 - k^2|}$.

► Procédure : Construire le cercle d'Apollonius (Points de division)

Les extrémités du diamètre de ce cercle situé sur la droite formée par les points a et b peuvent être trouvées facilement par les "points de division" :

1. **Point de division interne** P : sur le segment $[a, b]$, tel que $\frac{|P-a|}{|P-b|} = k$. Il est donné par la moyenne pondérée $P = \frac{a+kb}{1+k}$.
2. **Point de division externe** P' : sur la droite passant par a et b mais en dehors du segment, tel que $\frac{|P'-a|}{|P'-b|} = k$. Il est donné par $P' = \frac{a-kb}{1-k}$.

3. Le cercle d'Apollonius a pour diamètre le segment $[P, P']$. Son centre est donc exactement au milieu, $c = \frac{P+P'}{2}$, et son rayon est $R = \frac{|P-P'|}{2}$.

✓ Astuce : Transformation de Möbius associée

La fonction (aussi appelée transformation de Möbius) définie par $f(z) = \frac{z-a}{z-b}$ a pour propriété d'envoyer le cercle d'Apollonius $|z-a| = k|z-b|$ sur le cercle centré à l'origine de rayon k (c'est-à-dire le lieu géométrique $|w| = k$).

5 Continuité et Limites

Examen : ~60%

5.1 Définitions et Théorèmes fondamentaux

Définition : Continuité

Une fonction f est **continue** en a si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x, \quad |x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

Si f est continue en tout point de son domaine, on dit simplement que f est continue.

Définition : Continuité uniforme

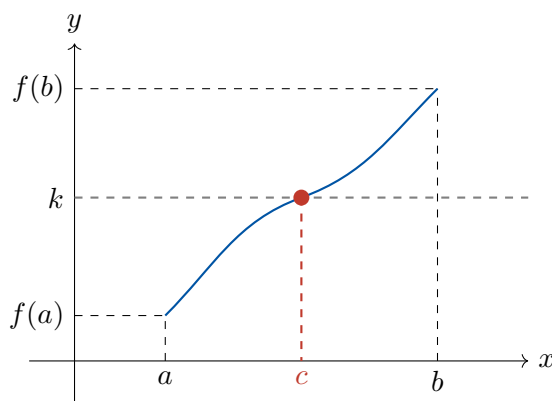
Une fonction f est **uniformément continue** sur un intervalle I si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x, y \in I, \quad |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Remarque : Le δ ne dépend que de ε , et pas du point x ou y .

Théorème : Théorème des Valeurs Intermédiaires (TVI)

Si f est continue sur un intervalle $[a, b]$, alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = k$.



Théorème : Théorème des Valeurs Extrêmes (TVE)

Si f est continue sur un intervalle **fermé et borné** $[a, b]$, alors f atteint son maximum et son minimum globaux sur $[a, b]$.

5.2 Procédures de résolution

► Procédure : Prouver la continuité en a par ε - δ

1. Fixer $\varepsilon > 0$ arbitrairement.
2. Partir de $|f(x) - f(a)|$ et utiliser des inégalités pour le majorer sous la forme $K|x - a|$.
3. Poser $\delta = \frac{\varepsilon}{K}$ (ou $\min(\text{constante}, \frac{\varepsilon}{K})$ si on a besoin de restreindre x à un voisinage de a).
4. Rédiger proprement : “Soit $\varepsilon > 0$. Posons $\delta = \dots$. Pour tout x tel que $|x - a| < \delta$, on a $|f(x) - f(a)| \leq \dots < \varepsilon$. Donc f est continue en a .”

► Procédure : Prouver l'existence (et l'unicité) de solutions par le TVI

Pour montrer qu'une équation $f(x) = k$ admet une solution sur $[a, b]$:

1. Vérifier et écrire noir sur blanc que f est **continue** sur $[a, b]$.
2. Calculer $f(a)$ et $f(b)$.
3. Vérifier que k est compris entre $f(a)$ et $f(b)$ (souvent $k = 0$, il faut donc montrer que $f(a) \cdot f(b) < 0$).
4. **Existence** : Invoquer le TVI $\implies$ il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = k$.
5. **Unicité (si demandée)** : Calculer $f'(x)$. Si $f'(x) > 0$ (ou < 0) sur $]a, b[$, alors f est strictement monotone, donc la racine est unique.

Exemple : Existence de racines (type examen)

Énoncé : Montrer que l'équation $x^3 + x - 1 = 0$ possède exactement une racine réelle dans l'intervalle $[0, 1]$.

Résolution :

1. Soit $f(x) = x^3 + x - 1$. C'est un polynôme, donc continu sur $\mathbb{R}$ et a fortiori sur $[0, 1]$.
2. On évalue aux bornes : $f(0) = -1 < 0$ et $f(1) = 1 > 0$.
3. Comme $f(0) < 0 < f(1)$, d'après le TVI, il existe au moins un $c \in]0, 1[$ tel que $f(c) = 0$.
4. Dérivons : $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
5. f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$. La racine c est par conséquent **unique**.

► Procédure : Boîte à outils : Calcul de limites

Lorsqu'on tombe sur une limite indéterminée, tester dans l'ordre :

1. **Substitution directe** $\implies$ donne la forme de l'indétermination ($0/0$, ∞/∞ , etc.).
2. **Factorisation / Simplification algébrique** (pour lever l'indétermination si polynôme/racine).
3. **Multiplication par le conjugué** (quand il y a des différences de racines).
4. **Règle de L'Hôpital** (pour $0/0$ ou ∞/∞) : $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$.
5. **Théorème de l'étau / sandwich** (s'il y a des fonctions bornées comme $\sin$, $\cos$).
6. **Développements de Taylor** (très puissant pour $0/0$ avec des $\sin$, $\cos$, $\ln$).

× Piège : Règle de L'Hôpital

- Toujours vérifier que l'on a bien une forme $0/0$ ou ∞/∞ avant d'appliquer L'Hôpital. Si ce n'est pas le cas, le résultat sera faux !
- On dérive le numérateur et le dénominateur séparément (on ne dérive **pas** le quotient par la

règle du quotient!).

5.3 Dérivées des fonctions usuelles et réciproques

Fonction $f(x)$	Dérivée $f'(x)$	Fonction réciproque	Dérivée
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$\arccos(x)$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\tan(x)$	$1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$	$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$

5.4 Exemples d'examens

Exemple : Janvier 2019 - Continuité

Étudiez la continuité de la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2)}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Résolution :

La fonction est clairement continue pour $x \neq 0$ comme composée et quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas. En $x = 0$, on étudie la limite :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(x \cdot \frac{\sin(x^2)}{x^2} \right).$$

Sachant que $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin(u)}{u} = 1$ (avec $u = x^2$), on a :

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot 1 = 0.$$

La limite vaut la valeur de la fonction en 0 ($f(0) = 0$), donc la fonction est continue en $x = 0$. Par conséquent, f est continue sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Exemple : Août 2021 - Théorème des Valeurs Intermédiaires

Montrez que l'équation $\cos(x) = x$ admet au moins une solution dans l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Résolution :

Posons $g(x) = \cos(x) - x$. La fonction g est continue sur l'intervalle fermé $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Évaluons g aux bornes de l'intervalle :

- $g(0) = \cos(0) - 0 = 1 > 0$
- $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{2} = 0 - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2} < 0$

Comme $g(0)$ et $g\left(\frac{\pi}{2}\right)$ sont de signes opposés et que g est continue, le Théorème des Valeurs Intermédiaires (TVI) garantit l'existence d'au moins un $c \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ tel que $g(c) = 0$, c'est-à-dire $\cos(c) = c$.

Exemple : Janvier 2023 - Limite avec Règle de L'Hôpital

Calculez la limite suivante, ou démontrez qu'elle n'existe pas :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$$

Résolution :

En évaluant numérateur et dénominateur en $x = 0$, on obtient une indétermination du type " $\frac{0}{0}$ ". On applique la Règle de L'Hôpital une première fois :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{2x}$$

C'est à nouveau une indétermination " $\frac{0}{0}$ ". On applique la Règle de L'Hôpital une seconde fois :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{2} = \frac{1}{2}$$

La limite existe donc et vaut $\frac{1}{2}$.

Exemple : Preuve de continuité par ε - δ (type examen)

Énoncé : Montrez, en utilisant la définition ε - δ , que la fonction $f(x) = x^2$ est continue en $a = 3$.

Rappel de la définition :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : |x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

Résolution :

Étape 1 — Écrire ce qu'on doit prouver. Il faut montrer :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : |x - 3| < \delta \implies |x^2 - 9| < \varepsilon$$

Étape 2 — Travail au brouillon (majorer $|f(x) - f(a)|$).

On factorise :

$$|x^2 - 9| = |(x - 3)(x + 3)| = |x - 3| \cdot |x + 3|$$

Le facteur $|x - 3|$ est le terme qu'on contrôle (il est $< \delta$). Le problème est de borner $|x + 3|$, qui dépend de x .

Astuce classique : On restreint $\delta \leq 1$. Si $|x - 3| < 1$, alors $x \in]2, 4[$, et donc :

$$|x + 3| < 4 + 3 = 7$$

On obtient alors la majoration :

$$|x^2 - 9| = |x - 3| \cdot |x + 3| < \delta \cdot 7$$

Pour que cela soit $< \varepsilon$, il suffit de prendre $\delta \cdot 7 \leq \varepsilon$, i.e. $\delta \leq \varepsilon/7$.

Étape 3 — Rédaction propre.

Soit $\varepsilon > 0$. Posons $\delta = \min\left(1, \frac{\varepsilon}{7}\right)$.

Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x - 3| < \delta$. Comme $\delta \leq 1$, on a $x \in]2, 4[$ et donc $|x + 3| < 7$. Par conséquent :

$$|f(x) - f(3)| = |x^2 - 9| = |x - 3| \cdot |x + 3| < \frac{\varepsilon}{7} \cdot 7 = \varepsilon$$

Donc f est continue en $a = 3$. $\square$

Pourquoi $\min(1, \varepsilon/7)$? Le min garantit les **deux** conditions simultanément : (i) $\delta \leq 1$ pour borner $|x + 3|$, et (ii) $\delta \leq \varepsilon/7$ pour conclure. C'est un schéma récurrent dans toutes les preuves ε - δ .

6 Taylor et Approximation

Examen : ~100%

✓ Astuce : Priorité Examen

Ce chapitre est **fondamental**. Il tombe à **chaque** examen, souvent sous forme de calcul de polynôme, de majoration du reste, ou d'approximation d'intégrale. Il faut connaître les développements de Maclaurin par cœur.

6.1 Théorèmes fondamentaux

Théorème : Théorème des accroissements finis (TAF)

Si f est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que :

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

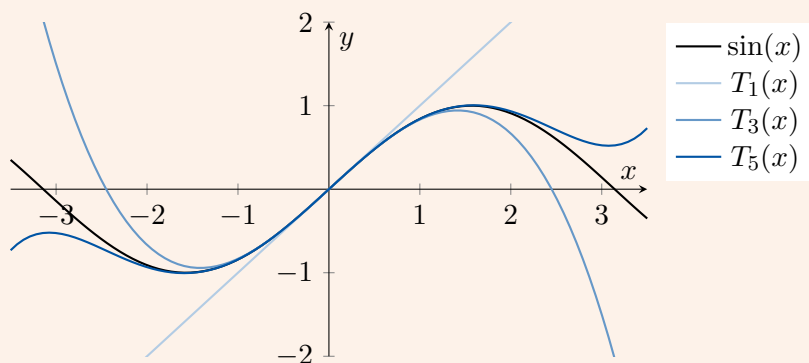
Interprétation géométrique : Il existe une tangente parallèle à la sécante reliant $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$.

Définition : Polynôme et Reste de Taylor

Si f est n fois dérivable en a , le **polynôme de Taylor** d'ordre n centré en a est :

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!} (x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$$

Si $a = 0$, on parle de polynôme de **Maclaurin**.



Le **reste** est l'erreur d'approximation : $R_n(x) = f(x) - T_n(x)$.

Théorème : Formule de Taylor avec reste de Lagrange

Si f est $(n+1)$ fois dérivable, alors il existe c compris entre a et x tel que :

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}$$

Théorème : Formule de Taylor avec reste Intégral

Si f est de classe C^{n+1} , le reste peut aussi s'exprimer sous forme d'une intégrale exacte :

$$R_n(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt$$

6.2 Développements de Maclaurin classiques (à savoir par cœur !)

Fonction	Développement (jusqu'à l'ordre n)	Rayon R
e^x	$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$	∞
$\sin(x)$	$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$	∞
$\cos(x)$	$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$	∞
$\frac{1}{1-x}$	$1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n$	1
$\ln(1+x)$	$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$	1
$(1+x)^\alpha$	$1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots + \binom{\alpha}{n} x^n$	1

6.3 Procédures de résolution

► Procédure : Calculer un polynôme de Taylor

Méthode 1 : Par la définition (si on demande en $a \neq 0$ ou fonction inconnue)

1. Calculer les dérivées successives : $f(x), f'(x), f''(x), \dots, f^{(n)}(x)$.
2. Évaluer en a : $f(a), f'(a), f''(a), \dots, f^{(n)}(a)$.
3. Construire le polynôme : $T_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \dots$

Méthode 2 : Par substitution (beaucoup plus rapide si Maclaurin)

1. Partir d'un développement connu. Ex : pour $\sin(2x^2)$, prendre le développement de $\sin(u)$.
2. Substituer $u = 2x^2$.
3. Tronquer à l'ordre demandé (ignorer les termes de degré $> n$).

► Procédure : Borner l'erreur avec le reste de Lagrange

On cherche à borner $|f(x) - T_n(x)| = |R_n(x)|$.

1. Écrire l'expression du reste : $|R_n(x)| = \frac{|f^{(n+1)}(c)|}{(n+1)!} |x-a|^{n+1}$ pour c entre a et x .
2. Trouver un majorant M tel que $|f^{(n+1)}(c)| \leq M$ pour **tout** c entre a et x .
 - Si $f^{(n+1)}$ contient un sin ou cos, majorer par 1.
 - Si $f^{(n+1)}$ contient e^c (avec $0 < c < x$), majorer par e^x (ou 3^x).
 - Si $f^{(n+1)}$ est décroissante, majorer par la valeur en la plus petite borne.
3. Conclure : $|R_n(x)| \leq \frac{M |x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$.

4. S'il faut trouver le degré n pour une précision ε , tester des valeurs de $n = 1, 2, 3 \dots$ dans la majoration jusqu'à obtenir $\leq \varepsilon$.

Exemple : Majoration du reste (type examen)

Énoncé : Quel ordre n faut-il choisir pour que le polynôme de Maclaurin de e^x approxime $e^{0.5}$ à 10^{-3} près ?

Résolution :

1. Ici $f(x) = e^x$, $a = 0$, $x = 0.5$.
2. La dérivée $(n+1)$ -ième est $f^{(n+1)}(c) = e^c$, avec $c \in [0, 0.5]$.
3. Majoration : comme la fonction exponentielle est croissante, le maximum sur cet intervalle est en $c = 0.5$. On a $e^{0.5} = \sqrt{e} < \sqrt{4} = 2$. Donc on peut prendre $M = 2$.
4. L'erreur vérifie : $|R_n(0.5)| \leq \frac{2}{(n+1)!} (0.5)^{n+1} = \frac{2}{(n+1)!} \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^n (n+1)!}$.
5. On veut $|R_n(0.5)| \leq 10^{-3} = 0.001$. Testons des valeurs de n :
 - $n = 3$: $\frac{1}{8 \times 24} = \frac{1}{192} > 0.001$
 - $n = 4$: $\frac{1}{16 \times 120} = \frac{1}{1920} \leq 0.001$ (OK)
6. Il faut donc un polynôme d'ordre $n = 4$.

► Procédure : Approximation d'une valeur et justification de l'erreur

Pour approximer une valeur (ex : $1/\sqrt{17}$) à l'aide d'un développement de Taylor et justifier la précision :

1. **Choisir la fonction et le point de base :** Identifier $f(x)$ (ex : $f(x) = 1/\sqrt{x}$) et un point a proche de la valeur cherchée où la fonction et ses dérivées sont faciles à calculer (ex : $a = 16$).
2. **Calculer les dérivées :** Évaluer $f(a), f'(a), \dots, f^{(n)}(a)$ et exprimer $f^{(n+1)}(x)$ (ou $f^{(n+1)}(c)$).
3. **Écrire la formule de Taylor avec reste de Lagrange :**

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \dots + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}$$

avec $c \in [a, x]$ (ou $[x, a]$).

4. **Évaluer en x :** Remplacer x par la valeur souhaitée (ex : $x = 17$). Séparer l'approximation (le polynôme) et l'erreur (le reste).
5. **Borner l'erreur (le reste) :** Étudier le comportement de $f^{(n+1)}(c)$ sur l'intervalle $[a, x]$. Souvent, la fonction est monotone, ce qui permet de trouver facilement son *supremum* aux bornes de l'intervalle.
6. **Conclure :** L'erreur absolue est bornée par cette valeur maximale, ce qui prouve la précision de l'approximation.

Exemple : Approximation de $1/\sqrt{17}$ à $5 \cdot 10^{-4}$ près (Examen)

Énoncé : En utilisant un développement de Taylor de $1/\sqrt{x}$ autour de $x = 16$, démontrez que $\frac{31}{128}$ est une valeur approchée de $1/\sqrt{17}$ à $5 \cdot 10^{-4}$ près. Justifiez l'erreur. (Aide : $16^{5/2} = 1024$)

Résolution : Posons $f(x) = x^{-1/2}$. On calcule les dérivées et leurs valeurs en $a = 16$:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^{-1/2} & \implies f(16) &= 16^{-1/2} = \frac{1}{4} \\ f'(x) &= -\frac{1}{2}x^{-3/2} & \implies f'(16) &= -\frac{1}{2}(16)^{-3/2} = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^3 = -\frac{1}{128} \\ f''(x) &= \frac{3}{4}x^{-5/2} \end{aligned}$$

On écrit la formule de Taylor à l'ordre 1 autour de $x = 16$ avec le reste de Lagrange (ordre 2) :

$$f(x) = f(16) + f'(16)(x - 16) + \frac{f''(c)}{2!}(x - 16)^2, \quad \text{avec } c \in [16, x]$$

$$\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{4} - \frac{1}{128}(x - 16) + \frac{3}{8}c^{-5/2}(x - 16)^2$$

Si on cherche $1/\sqrt{17}$, on évalue en $x = 17$. Le terme $(x - 16)$ vaut 1 :

$$\frac{1}{\sqrt{17}} = \frac{1}{4} - \frac{1}{128}(1) + \frac{3}{8}c^{-5/2}(1)^2 = \frac{31}{128} + \frac{3}{8}c^{-5/2}, \quad \text{avec } c \in [16, 17]$$

On doit maintenant borner l'erreur (le reste) en valeur absolue :

$$\left| \frac{1}{\sqrt{17}} - \frac{31}{128} \right| = \frac{3}{8}c^{-5/2} \leq \frac{3}{8} \sup_{c \in [16, 17]} c^{-5/2}$$

La fonction $c \mapsto c^{-5/2}$ est strictement décroissante sur $[16, 17]$, son *supremum* est donc atteint en la borne inférieure $c = 16$:

$$\left| \frac{1}{\sqrt{17}} - \frac{31}{128} \right| \leq \frac{3}{8}16^{-5/2} = \frac{3}{8} \cdot 4^{-5} = \frac{3}{8 \times 1024} = \frac{3}{8192}$$

On vérifie la précision demandée : $\frac{3}{8192} < \frac{3}{6000} = \frac{1}{2000} = 5 \cdot 10^{-4}$. La précision est donc démontrée.

Exemple : Approximation de $1/\sqrt{5}$ par encadrement (Examen)

Énoncé : Soit $f(x) = 1/\sqrt{x}$. Écrivez la formule de Taylor avec reste à l'ordre 2 autour de $x = 4$, et déduisez-en que $\frac{7}{16}$ est une approximation de $1/\sqrt{5}$ à $\frac{3}{256}$ près.

Résolution : De la même manière, on calcule les dérivées et leurs valeurs en $a = 4$:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^{-1/2} & \implies f(4) &= \frac{1}{2} \\ f'(x) &= -\frac{1}{2}x^{-3/2} & \implies f'(4) &= -\frac{1}{16} \\ f''(x) &= \frac{3}{4}x^{-5/2} \end{aligned}$$

Le développement de Taylor à l'ordre 1 avec reste d'ordre 2 est :

$$f(x) = f(4) + f'(4)(x - 4) + \frac{f''(c)}{2!}(x - 4)^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{16}(x - 4) + \frac{3}{8}c^{-5/2}(x - 4)^2, \quad \text{avec } c \in [4, x]$$

On choisit $x = 5$ pour approximer $1/\sqrt{5}$:

$$f(5) = \frac{1}{2} - \frac{1}{16}(1) + \frac{3}{8}c^{-5/2}(1)^2 = \frac{7}{16} + \frac{3}{8}c^{-5/2}, \quad \text{avec } c \in [4, 5]$$

La dérivée seconde (et donc le reste $\frac{3}{8}c^{-5/2}$) est strictement positive sur $[4, 5]$, ce qui implique que l'approximation est par défaut :

$$f(5) = \frac{1}{\sqrt{5}} \geq \frac{7}{16}$$

De plus, cette même dérivée seconde est décroissante en c , ce qui veut dire qu'elle est maximale en $c = 4$ sur l'intervalle $[4, 5]$. On a donc la majoration :

$$f(5) = \frac{1}{\sqrt{5}} \leq \frac{7}{16} + \frac{3}{8}(4)^{-5/2} = \frac{7}{16} + \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{32} = \frac{7}{16} + \frac{3}{256}$$

On obtient ainsi l'encadrement strict $\frac{7}{16} \leq \frac{1}{\sqrt{5}} \leq \frac{7}{16} + \frac{3}{256}$, ce qui montre bien que $\frac{7}{16}$ approxime $1/\sqrt{5}$ à $\frac{3}{256}$ près.

► Procédure : Approximer une intégrale par Taylor

Problème typique : évaluer $\int_0^{0.1} \frac{\sin x}{x} dx$ à 10^{-4} près.

1. Substituer l'intégrande par son développement en série de Taylor.

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{x - x^3/3! + x^5/5! - \dots}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \dots$$

2. Intégrer terme à terme :

$$\int_0^{0.1} \left(1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} \right) dx = \left[x - \frac{x^3}{18} + \frac{x^5}{600} \right]_0^{0.1}$$

3. Pour estimer l'erreur (souvent une **série alternée**), utiliser le Théorème de Leibniz : l'erreur est majorée par la valeur absolue du **premier terme négligé**.

Exemple : Taylor par la définition en $a \neq 0$ (Examen blanc déc. 2018)

Énoncé : Écrivez les quatre premiers termes du développement de Taylor autour de $x = 1$ de $f(x) = (x - 1)e^x$.

Résolution : On applique la formule $T_3(x) = \sum_{k=0}^3 \frac{f^{(k)}(1)}{k!} (x - 1)^k$. On calcule les dérivées :

$$\begin{aligned} f(x) &= (x - 1)e^x & f(1) &= 0 \\ f'(x) &= xe^x & f'(1) &= e \\ f''(x) &= (x + 1)e^x & f''(1) &= 2e \\ f'''(x) &= (x + 2)e^x & f'''(1) &= 3e \end{aligned}$$

On construit le polynôme :

$$T_3(x) = 0 + e(x - 1) + \frac{2e}{2!}(x - 1)^2 + \frac{3e}{3!}(x - 1)^3 = \boxed{e(x - 1) + e(x - 1)^2 + \frac{e}{2}(x - 1)^3}$$

Exemple : Taylor pour résoudre une équation de façon approchée (Examen juin 2024)

Énoncé : Soit $f(x) = \cos(x) - x$.

(a) Montrer que $f(x) = 0$ possède une unique solution pour $x \geq 0$.

(b) Calculer le polynôme $t_1(x)$ à l'ordre 1 autour de $x = 0$, puis trouver sa racine x_1 .

(c) Borner $|f(x_1)|$ avec le reste de Taylor.

Résolution :

1. **Existence :** $f(0) = 1 > 0$ et $f(\pi/2) = -\pi/2 < 0$. Par le TVI, il existe une racine dans $]0, \pi/2[$.

Unicité : $f'(x) = -\sin(x) - 1 \leq 0$, donc f est strictement décroissante : une seule racine.

2. $f(0) = 1$, $f'(0) = -\sin(0) - 1 = -1$, donc $t_1(x) = 1 - x$ et la racine est $\boxed{x_1 = 1}$.

3. Par Taylor avec reste de Lagrange à l'ordre 2 : $f(x) = t_1(x) + \frac{f''(\xi)}{2}x^2$ avec $\xi \in [0, 1]$. $f''(x) = -\cos(x)$, donc $|f''(\xi)| \leq 1$. En $x = x_1 = 1$:

$$|f(1)| = \left| f(1) - \underbrace{t_1(1)}_{=0} \right| \leq \frac{1}{2} \cdot 1^2 = \boxed{\frac{1}{2}}$$

Exemple : Taylor par intégration d'une série géométrique (Examen août 2025)

Énoncé : On sait que $\operatorname{artanh}'(x) = \frac{1}{1-x^2}$. Calculez la série de Taylor de $\operatorname{artanh}(x)$ autour de $x = 0$ et son rayon R .

Résolution : On reconnaît une série géométrique avec $q = x^2$:

$$\frac{1}{1-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} \quad \text{pour } |x| < 1$$

On intègre terme à terme pour retrouver $\operatorname{artanh}(x) = \int \frac{1}{1-x^2} dx$:

$$\operatorname{artanh}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots$$

La constante d'intégration vaut 0 car $\operatorname{artanh}(0) = 0$. Le rayon de convergence est $\boxed{R = 1}$.

Exemple : Intégrale approchée par Taylor (type examen)

Énoncé : Calculez $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ avec une erreur $\leq 10^{-3}$.

Résolution : On substitue $u = -x^2$ dans le développement de e^u :

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} - \dots$$

On intègre terme à terme :

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx = \left[x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} - \frac{x^7}{42} + \frac{x^9}{216} - \dots \right]_0^1 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} + \frac{1}{216} - \dots$$

C'est une **série alternée** décroissante. Par Leibniz, l'erreur est majorée par le premier terme omis. Le 5^e terme vaut $\frac{1}{216} \approx 0.0046 > 10^{-3}$, le 6^e terme vaut $\frac{1}{1320} \approx 0.00076 < 10^{-3}$. On garde donc 5 termes :

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx \approx 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} + \frac{1}{216} \approx \boxed{0.7475}$$

7 Intégrales

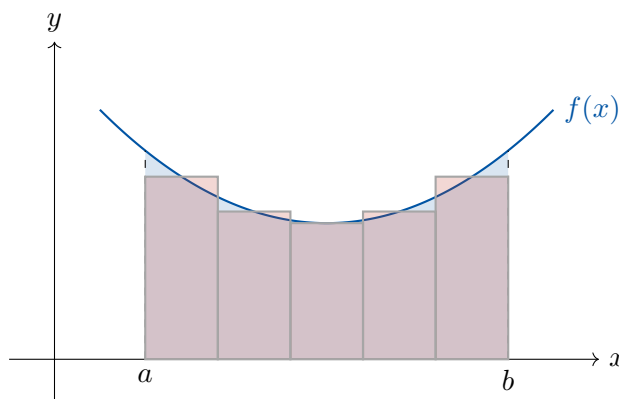
Examen : ~60%

7.1 Théorèmes fondamentaux

Définition : Intégrale définie et Somme de Riemann

L'intégrale définie $\int_a^b f(x) dx$ représente l'aire (signée) sous la courbe de f sur $[a, b]$. Elle est définie comme la limite des sommes de Riemann :

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x \quad \text{avec } \Delta x = \frac{b-a}{n}$$



Théorème : Théorème Fondamental de l'Analyse (TFA)

- Partie 1 (Dérivation de l'intégrale)** : Si f est continue sur $[a, b]$, alors la fonction $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ est dérivable et $F'(x) = f(x)$.
- Partie 2 (Calcul pratique)** : Si F est une primitive de f ($F' = f$), alors :

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = \left[F(x) \right]_a^b$$

✓ Astuce : TFA avec bornes composées (Piège fréquent)

Si la borne supérieure est une fonction $u(x)$ au lieu de x , il faut appliquer la règle de la chaîne :

$$F(x) = \int_a^{u(x)} f(t) dt \implies F'(x) = f(u(x)) \cdot u'(x)$$

Exemple : $F(x) = \int_1^{x^2} \frac{e^{-t}}{t} dt \implies F'(x) = \frac{e^{-x^2}}{x^2} \cdot 2x = \frac{2e^{-x^2}}{x}$.

Définition : Valeur moyenne d'une fonction

La valeur moyenne (ou moyenne intégrale) d'une fonction continue f sur un intervalle $[a, b]$ est :

$$f_{\text{moy}} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

Exemple : Moyenne intégrale d'une fonction (Juin 2019 - Q1b)

Énoncé : Une barre cylindrique de longueur L a une masse volumique variable $d(x)$ selon la section $x \in [0, L]$. Trouver sa masse volumique moyenne globale.

Résolution : La moyenne d'une fonction continue sur $[0, L]$ est $\frac{1}{L} \int_0^L f(x) dx$. Ici, la masse totale de la barre est $M = \int_0^L S \cdot d(x) dx$ (où S est la section transversale constante). Le volume total de la barre est $V = S \cdot L$. La masse volumique moyenne est le rapport masse/volume :

$$d_{\text{moy}} = \frac{M}{V} = \frac{S \int_0^L d(x) dx}{SL} = \frac{1}{L} \int_0^L d(x) dx$$

On retrouve bien la formule de la valeur moyenne pour la fonction $d(x)$.

7.2 Techniques d'intégration**► Procédure : Intégration par parties (IPP)**

Formule : $\int u dv = uv - \int v du$.

Astuce ALPES pour choisir u (prendre la première fonction de la liste qui apparaît) :

- **A**rc trig (ex. arctan, arcsin)
- **L**ogarithme (ex. ln)
- **P**olynôme (ex. x^2, x)
- **E**xponentielle (ex. e^x)
- **S**inus/Cosinus (ex. $\sin(x), \cos(x)$)

► Procédure : Intégration par fractions partielles

Pour intégrer une fraction rationnelle $\frac{P(x)}{Q(x)}$:

1. **Division polynomiale** : Si le degré de P est $\geq$ au degré de Q , faire la division euclidienne.
2. **Factorisation** : Factoriser complètement le dénominateur $Q(x)$ en facteurs linéaires $(x - a)$ et irréductibles du second degré $(x^2 + bx + c)$.
3. **Décomposition** :
 - Facteur $(x - a) \rightarrow \frac{A}{x-a}$
 - Facteur $(x - a)^k \rightarrow \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \dots + \frac{A_k}{(x-a)^k}$
 - Facteur $(x^2 + bx + c) \rightarrow \frac{Cx+D}{x^2+bx+c}$
4. **Intégration** : Les termes se ramènent à des ln, des puissances négatives, et parfois de l'arctan.

7.3 Intégrales impropres

Une intégrale est **impropre** si l'une des bornes est infinie ($\pm\infty$) ou si la fonction intégrande présente une asymptote verticale dans l'intervalle d'intégration (elle n'est pas bornée).

► Procédure : Déterminer la convergence d'une intégrale impropre

1. **Identifier le problème** :

- Type 1 : Borne infinie (ex. $\int_1^\infty f(x) dx$). On la définit comme $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_1^t f(x) dx$.
- Type 2 : Asymptote verticale en c (ex. en $x = 0$). Si c est au bord de l'intervalle, on

prend la limite $t \rightarrow c$. Si c'est à l'intérieur, on **doit séparer** l'intégrale en c .

2. Intégrales de référence (Riemann) :

- $\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha} dx$ **converge** ssi $\alpha > 1$.
- $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx$ **converge** ssi $\alpha < 1$.

3. Appliquer un critère de comparaison (si $f(x) \geq 0$) :

- Comparaison directe : $0 \leq f(x) \leq g(x)$. Si $\int g$ converge, alors $\int f$ converge.
- Comparaison par limite : $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L \in]0, \infty[$. Même nature.

× Piège : Points de discontinuité cachés

Toujours vérifier si le dénominateur s'annule **à l'intérieur** de l'intervalle d'intégration. Par exemple, pour $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx$, on ne peut pas simplement faire $[-1/x]_{-1}^1$. Il faut séparer en $\int_{-1}^0 + \int_0^1$ et voir que les deux divergent !

Exemple : Intégrale impropre et lien avec une série (Décembre 2018 - Q1a)

Énoncé : Étudier la convergence de l'intégrale impropre $\int_2^\infty \frac{1}{x \ln(x)} dx$.

Résolution : Il s'agit d'une intégrale avec une borne infinie, on l'écrit comme une limite :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_2^t \frac{1}{x \ln(x)} dx$$

On effectue le changement de variable $u = \ln(x) \implies du = \frac{dx}{x}$. L'intégrale devient $\int \frac{1}{u} du = \ln|u| = \ln(\ln(x))$. On évalue aux bornes :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left[\ln(\ln(x)) \right]_2^t = \lim_{t \rightarrow \infty} (\ln(\ln(t)) - \ln(\ln(2))) = \infty$$

Puisque la limite est infinie, l'intégrale **diverge**.

Remarque (lien avec les séries) : D'après le critère intégral de convergence, on peut en déduire que la série $\sum_{k=2}^\infty \frac{1}{k \ln(k)}$ diverge également !

7.4 Applications géométriques

► Procédure : Calculer une longueur d'arc (Très fréquent à l'examen)

La formule donne la longueur L d'une courbe entre a et b .

1. Si la courbe est $y = f(x)$:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

2. Si la courbe est paramétrée par $(x(t), y(t))$ pour $t \in [t_1, t_2]$:

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

Astuce calculatoire : Souvent, l'expression sous la racine forme un carré parfait $\sqrt{(A+B)^2} = |A+B|$, ce qui simplifie l'intégrale.

► Procédure : Calculer un volume de révolution

1. Méthode des disques/rondelles (rotation autour de l'axe X) :

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$$

(Si zone comprise entre deux courbes f et g : $V = \pi \int_a^b (f^2 - g^2) dx$).

2. Méthode des tubes cylindriques (rotation autour de l'axe Y) :

$$V = 2\pi \int_a^b x \cdot |f(x)| dx$$

Exemple : Longueur d'arc (type examen)

Énoncé : Calculer la longueur de l'arc de chaînette d'équation $y = \cosh(x)$ pour $x \in [-1, 1]$.

Résolution :

- On a $f(x) = \cosh(x)$, donc $f'(x) = \sinh(x)$.
- L'expression sous la racine est $1 + (f'(x))^2 = 1 + \sinh^2(x)$.
- Par l'identité hyperbolique fondamentale $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$, on a $1 + \sinh^2(x) = \cosh^2(x)$.
- La longueur est donc :

$$L = \int_{-1}^1 \sqrt{\cosh^2(x)} dx = \int_{-1}^1 \cosh(x) dx$$

5. On intègre (la primitive est $\sinh(x)$) :

$$L = [\sinh(x)]_{-1}^1 = \sinh(1) - \sinh(-1) = 2 \sinh(1) = e - \frac{1}{e} \quad \square$$

Exemple : Calcul d'une longueur d'arc sinusoïdal (Décembre 2018 - Q1c)

Énoncé : Donner la formule (l'intégrale) de la longueur de la sinusoïde $y = a \sin(x/b)$ sur une période.

Résolution :

1. **Période** : La période d'une fonction de la forme $\sin(kx)$ est $\frac{2\pi}{k}$. Ici $k = 1/b$, donc la

période est $2\pi b$. On intégrera donc sur l'intervalle $[0, 2\pi b]$.

2. **Dérivée** : On a $f(x) = a \sin(x/b)$, donc par la règle de dérivation en chaîne, $f'(x) = a \cdot \frac{1}{b} \cos(x/b) = \frac{a}{b} \cos(x/b)$.

3. **Longueur** : La longueur de l'arc est donnée par l'intégrale $\int \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$. En substituant :

$$L = \int_0^{2\pi b} \sqrt{1 + \left(\frac{a}{b} \cos(x/b)\right)^2} dx$$

Définition : Centre de gravité d'un domaine plan

Le centre de gravité $(\bar{x}, \bar{y})$ d'un domaine plan D (densité uniforme) est donné par :

$$\bar{x} = \frac{\iint_D x \, dA}{\iint_D dA} = \frac{\text{Moment en } x}{\text{Aire}}, \quad \bar{y} = \frac{\iint_D y \, dA}{\iint_D dA}$$

Si D possède un **axe de symétrie**, le centre de gravité se trouve sur cet axe.

Exemple : Centre de gravité d'un quart de disque (Examen jan. 2026, Q2)

Énoncé : Déterminer les coordonnées $(\bar{x}, \bar{y})$ du centre de gravité du quart de disque $D = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq R^2\}$.

Résolution :

1. **Symétrie** : La droite $y = x$ est axe de symétrie de D , donc $\bar{x} = \bar{y}$.

2. **Aire** : $A = \frac{\pi R^2}{4}$ (quart de disque).

3. **Moment** : En intégrant par bandes verticales (y va de 0 à $\sqrt{R^2 - x^2}$) :

$$\int_0^R \sqrt{R^2 - x^2} x \, dx$$

On pose $t = R^2 - x^2$, $dt = -2x \, dx$:

$$= \frac{1}{2} \int_0^{R^2} \sqrt{t} \, dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} t^{3/2} \Big|_0^{R^2} = \frac{R^3}{3}$$

4. **Conclusion** : $\bar{x} = \bar{y} = \frac{R^3/3}{\pi R^2/4} = \boxed{\frac{4R}{3\pi}}$.

Exemple : Fonction définie par une intégrale (Examen jan. 2026, Q3)

Énoncé : Soit $F(x) = \int_1^{x^2} \frac{e^{-t}}{t} \, dt$.

(a) Calculez $F'(x)$. (b) Montrez que $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) \leq \frac{1}{e}$.

Résolution :

1. On pose $G(x) = \int_1^x \frac{e^{-t}}{t} \, dt$, donc $G'(x) = \frac{e^{-x}}{x}$ (TFA).
Comme $F(x) = G(x^2)$, par la règle de la chaîne :

$$F'(x) = G'(x^2) \cdot 2x = \frac{e^{-x^2}}{x^2} \cdot 2x = \boxed{\frac{2e^{-x^2}}{x}}$$

2. Pour tout $t \geq 1$, on a $0 \leq \frac{1}{t} \leq 1$, donc $\frac{e^{-t}}{t} \leq e^{-t}$. Par comparaison :

$$0 \leq \int_1^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt \leq \int_1^\infty e^{-t} dt = [-e^{-t}]_1^\infty = \frac{1}{e}$$

L'intégrande est positive et bornée, donc l'intégrale impropre converge et $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) \leq \frac{1}{e}$.

8 Équations Différentielles (EDO)

Examen : ~100%

✓ Astuce : Le "Grand Problème"

Ce chapitre correspond systématiquement à la **dernière grande question de l'examen** (souvent sur 7 ou 8 points). Elle implique toujours la modélisation d'un problème physique (pendule, ressort, chute avec frottement, circuit RLC), la résolution de l'EDO, et l'interprétation de la solution.

8.1 Théorèmes fondamentaux

Théorème : Théorème de Cauchy-Lipschitz

Soit l'équation $y' = F(x, y)$ avec la condition initiale $y(x_0) = y_0$. Si $F(x, y)$ et $\frac{\partial F}{\partial y}$ sont continues autour du point (x_0, y_0) , alors le problème de Cauchy admet une **unique** solution sur un certain intervalle contenant x_0 .

8.2 Équations différentielles du 1er ordre

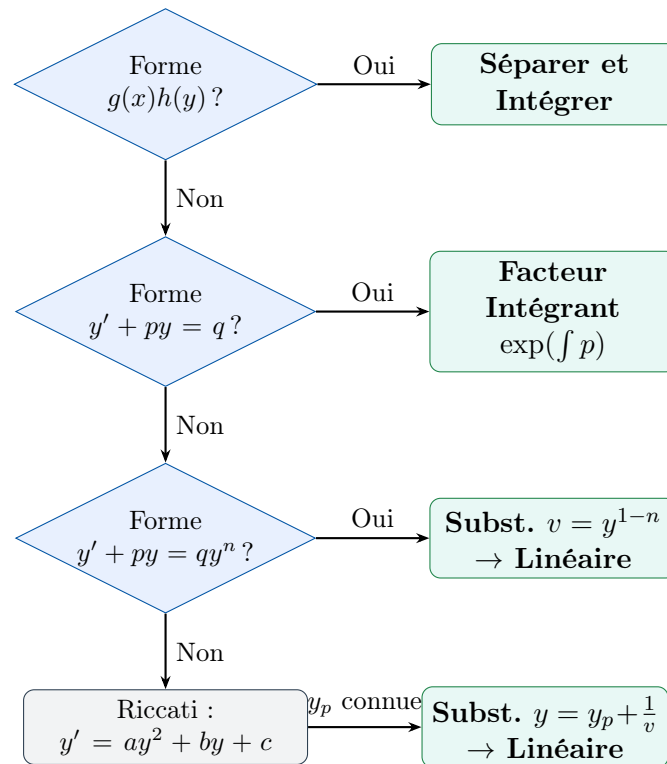
Définition : Champ de pente

L'équation $y' = F(x, y)$ associe à chaque point (x, y) une pente y' . Le tracé de ces mini-tangentes forme un **champ de pente** (ou champ de directions). Les courbes intégrales (solutions) sont les courbes "tangentes" à ce champ en tout point.

► Procédure : Algorithme de classification et résolution (1er ordre)

Pour résoudre $y' = F(x, y)$, on cherche à la faire correspondre à l'une de ces 4 formes, dans cet ordre :

- À variables séparables** : $y' = g(x)h(y)$
 - Écrire $\frac{dy}{dx} = g(x)h(y) \implies \frac{dy}{h(y)} = g(x) dx$
 - Intégrer les deux côtés : $\int \frac{dy}{h(y)} = \int g(x) dx + C$
- Linéaire** : $y' + p(x)y = q(x)$
 - Calculer le facteur intégrant : $\mu(x) = \exp(\int p(x) dx)$
 - Multiplier l'EDO par $\mu(x) \implies (\mu(x)y)' = \mu(x)q(x)$
 - Intégrer : $\mu(x)y = \int \mu(x)q(x) dx + C \implies y(x) = \frac{1}{\mu(x)} [\dots]$
- De Bernoulli** : $y' + p(x)y = q(x)y^n$ (avec $n \neq 0, 1$)
 - Faire le changement de variable $v = y^{1-n}$
 - L'équation en v devient linéaire : $v' + (1-n)p(x)v = (1-n)q(x)$
 - Résoudre pour v (cf. point 2), puis revenir à y .
- De Riccati** : $y' = a(x)y^2 + b(x)y + c(x)$
 - Il **faut** connaître une solution particulière $y_p(x)$ (souvent donnée ou évidente, ex : $y_p = cste$ ou x).
 - Faire le changement de variable $y = y_p + \frac{1}{v}$
 - L'équation en v devient linéaire.



8.3 Équations différentielles du 2nd ordre (Coeffs. constants)

Équation de la forme : $Ay'' + By' + Cy = f(x)$.

► Procédure : Résolution complète d'une EDO du 2nd ordre

Étape 1 : Solution homogène y_h (où $f(x) = 0$)

1. Poser l'équation caractéristique : $Ar^2 + Br + C = 0$
2. Calculer le discriminant $\Delta = B^2 - 4AC$
3. Trois cas :
 - $\Delta > 0$ (racines réelles r_1, r_2) : $y_h(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$
 - $\Delta = 0$ (racine double r) : $y_h(x) = (C_1 + C_2 x) e^{rx}$
 - $\Delta < 0$ (racines complexes $\alpha \pm i\beta$) : $y_h(x) = e^{\alpha x} (C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x))$

Étape 2 : Solution particulière y_p On devine la forme de y_p en fonction du terme non homogène $f(x)$:

- Si $f(x)$ est un polynôme de degré $n \implies y_p$ est un polynôme de degré n ($ax^n + \dots + z$).
- Si $f(x) = Ke^{kx} \implies$ tester $y_p = Ae^{kx}$.
 - *Attention* : si k est racine de l'équation caractéristique, multiplier par x (ou x^2 si racine double) : $y_p = Axe^{kx}$.
- Si $f(x) = \sin(\omega x)$ ou $\cos(\omega x) \implies$ tester $y_p = A \cos(\omega x) + B \sin(\omega x)$.

Injecter y_p dans l'EDO pour trouver les constantes.

Étape 3 : Solution générale et finale

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

Utiliser les conditions initiales (ex : $y(0) = y_0, y'(0) = v_0$) **uniquement à la toute fin** sur la solution générale complète pour trouver C_1, C_2 .

8.4 Modélisation Physique (Le problème final de l'examen)

► Procédure : Méthodologie globale pour le problème de modélisation

1. **Établir l'équation** : Utiliser $F = ma$ (pour un mouvement), ou la loi des mailles (circuit RLC). Bien poser les signes (ex : frottement opposé à la vitesse $\Rightarrow -kv$).
2. **Linéarisation (si demandé)** : Si l'équation est non-linéaire (ex : pendule avec $\sin \theta$), utiliser Taylor à l'ordre 1 ($\sin \theta \approx \theta$ pour θ petit).
3. **Résoudre l'EDO** : Appliquer les méthodes du 1er ou 2nd ordre.
4. **Conditions initiales** : Identifier les conditions du texte à $t = 0$ pour fixer les constantes.
5. **Interprétation** : Répondre à la question physique (calculer le temps pour atteindre le sol, la vitesse limite quand $t \rightarrow \infty$, etc.).

× Piège : Conditions initiales sur y_h

L'erreur la plus fréquente (et lourdement sanctionnée) est d'appliquer les conditions initiales sur la solution homogène y_h , puis d'ajouter la solution particulière y_p . **NON!** Il faut toujours appliquer les C.I. sur la solution **totale** $y(t) = y_h(t) + y_p(t)$.

Exemple : Modélisation d'une chute avec frottement (Examen blanc déc. 2018)

Énoncé : Une sphère tombe avec une vitesse initiale $v(0) = v_0$. L'équation de son mouvement est $mv' = mg - Dv^2$. Calculez la vitesse $v(t)$ en sachant que $\int \frac{dx}{1-x^2} = \operatorname{artanh}(x) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right)$.

Résolution :

1. **Séparation des variables** : On réécrit l'équation pour rassembler les v :

$$\frac{dv}{dt} = g \left(1 - \frac{D}{mg} v^2 \right) \Rightarrow \frac{dv}{1 - \frac{D}{mg} v^2} = g dt$$

2. **Changement de variable** : Posons $u = \sqrt{\frac{D}{mg}} v$, d'où $du = \sqrt{\frac{D}{mg}} dv$.

$$\sqrt{\frac{mg}{D}} \frac{du}{1 - u^2} = g dt \Rightarrow \frac{du}{1 - u^2} = \sqrt{\frac{Dg}{m}} dt$$

3. **Intégration** : En intégrant des deux côtés :

$$\operatorname{artanh}(u) = \sqrt{\frac{Dg}{m}} t + C \Rightarrow u(t) = \tanh \left(\sqrt{\frac{Dg}{m}} t + C \right)$$

4. **Conditions initiales** : À $t = 0$, $v(0) = v_0$, donc $u(0) = \sqrt{\frac{D}{mg}} v_0$. On trouve $C = \operatorname{artanh} \left(\sqrt{\frac{D}{mg}} v_0 \right)$.

5. **Solution finale** : En isolant $v(t)$ (et en posant $v_t = \sqrt{mg/D}$ la vitesse terminale) :

$$v(t) = v_t \tanh \left(\sqrt{\frac{Dg}{m}} t + \operatorname{artanh} \left(\frac{v_0}{v_t} \right) \right)$$

Exemple : Modèle de dynamique des populations de Verhulst (Examen juin 2024)

Énoncé : Le nombre de poissons dans un lac suit le modèle $\frac{dx}{dt} = x(1-x) - h$ avec condition initiale $x(0) = 2$. Calculez le temps T nécessaire à l'extinction ($x(T) = 0$) pour $h = \frac{5}{4}$. On rappelle que $\int \frac{dx}{(x+a)^2+1} = \arctan(x+a) + C$.

Résolution :

1. **Réécriture de l'EDO :** Pour $h = 5/4$, le membre de droite est :

$$x - x^2 - \frac{5}{4} = -\left(x^2 - x + \frac{5}{4}\right) = -\left(\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 1\right)$$

2. **Séparation et intégration :** L'équation devient $\frac{dx}{(x-\frac{1}{2})^2+1} = -dt$. En intégrant des deux côtés de 0 à t :

$$\int_2^{x(t)} \frac{1}{(x' - \frac{1}{2})^2 + 1} dx' = -\int_0^t dt' \implies \left[\arctan\left(x' - \frac{1}{2}\right) \right]_2^{x(t)} = -t$$

3. **Évaluation :** $\arctan\left(x(t) - \frac{1}{2}\right) - \arctan\left(\frac{3}{2}\right) = -t$.

4. **Temps d'extinction :** On cherche T tel que $x(T) = 0$:

$$\arctan\left(-\frac{1}{2}\right) - \arctan\left(\frac{3}{2}\right) = -T \implies T = \arctan\left(\frac{3}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{2}\right) \approx 1.45$$

Exemple : Équation de Zeldovich (Emballlement thermique) (Examen juin 2025)

Énoncé : La température $\theta(t)$ d'une réaction satisfait $\frac{d\theta}{dt} = e^\theta$. Calculez le temps T pour que la température passe de $\theta(0) = \theta_0 > 0$ à $\theta(T) = +\infty$.

Résolution :

1. **Séparation des variables :** On divise par e^θ :

$$e^{-\theta} \frac{d\theta}{dt} = 1 \implies e^{-\theta} d\theta = dt$$

2. **Intégration :** $\int e^{-\theta} d\theta = \int dt \implies -e^{-\theta} = t + C$.

3. **Condition initiale :** Pour $t = 0$, on a $\theta(0) = \theta_0$, ce qui donne $C = -e^{-\theta_0}$.

$$-e^{-\theta} = t - e^{-\theta_0} \implies e^{-\theta} = e^{-\theta_0} - t$$

4. **Isoler $\theta(t)$:** $\theta(t) = -\ln(e^{-\theta_0} - t)$.

5. **Temps critique T :** La température tend vers l'infini lorsque l'argument du logarithme tend vers 0^+ :

$$e^{-\theta_0} - T = 0 \implies T = e^{-\theta_0}$$

9 Suites et Séries de Fonctions

Examen : ~30%

9.1 Convergence simple et uniforme

Définition : Convergence simple (ponctuelle)

Une suite de fonctions $f_n(x)$ converge **simplement** vers une fonction $f(x)$ sur un domaine D si, pour chaque $x \in D$ fixé, la suite numérique $f_n(x)$ converge vers $f(x)$:

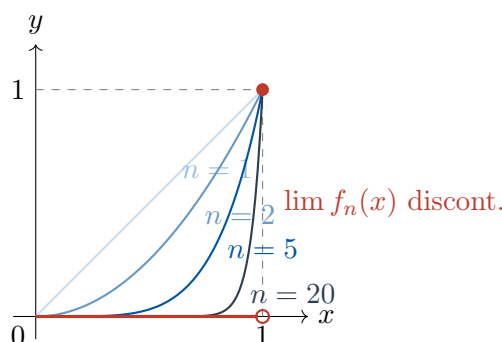
$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \quad \forall x \in D$$

Définition : Convergence uniforme

Une suite de fonctions $f_n(x)$ converge **uniformément** vers $f(x)$ sur D si l'écart maximal entre f_n et f tend vers 0 lorsque $n \rightarrow \infty$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{x \in D} |f_n(x) - f(x)| \right) = 0$$

Autrement dit, la vitesse de convergence ne dépend pas de x .



Théorème : Propriétés de la convergence uniforme

La convergence uniforme est "forte" et permet d'intervertir des limites :

- **Continuité** : Si les f_n sont continues et $f_n \xrightarrow{\text{unif}} f$, alors la limite f est continue.
- **Intégration** : On peut intervertir limite et intégrale : $\lim \int f_n = \int \lim f_n$.
- **Dérivation** : Si $f_n \xrightarrow{\text{simple}} f$ et $f'_n \xrightarrow{\text{unif}} g$, alors f est dérivable et $f' = g$.

9.2 Procédures de résolution

► Procédure : Vérifier la convergence uniforme d'une suite de fonctions

Soit une suite $f_n(x)$ sur un domaine D .

1. **Calculer la limite simple** $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ pour tout $x \in D$.
2. **Poser la fonction écart** $E_n(x) = |f_n(x) - f(x)|$.
3. **Chercher le supremum de l'écart** : Dériver $E_n(x)$ par rapport à x , trouver les points critiques (où $E'_n(x) = 0$), et en déduire le maximum $M_n = \sup_D E_n(x)$.
4. **Conclure** :

- Si $\lim_{n \rightarrow \infty} M_n = 0$, la convergence est **uniforme**.
- Si $\lim_{n \rightarrow \infty} M_n \neq 0$, la convergence est **seulement simple**.

Théorème : Test de Weierstrass (M-test) pour les SÉRIES de fonctions

Pour étudier la convergence uniforme d'une série $\sum f_n(x)$ sur D :

1. Trouver une suite numérique M_n (qui ne dépend pas de x) telle que $|f_n(x)| \leq M_n$ pour tout $x \in D$.
2. Si la série numérique $\sum M_n$ **converge**, alors la série de fonctions $\sum f_n(x)$ converge **absolument et uniformément** sur D .

Exemple : Convergence uniforme (type examen)

Énoncé : Étudier la convergence simple et uniforme de $f_n(x) = xe^{-nx}$ sur $[0, \infty[$.

Résolution :

1. **Limite simple :** Pour $x = 0$, $f_n(0) = 0 \rightarrow 0$. Pour $x > 0$, l'exponentielle décroissante l'emporte, donc $f_n(x) \rightarrow 0$. La limite simple est $f(x) = 0$.
2. **Écart :** $E_n(x) = |xe^{-nx} - 0| = xe^{-nx}$ (car $x \geq 0$).
3. **Recherche du supremum :** On dérive par rapport à x :

$$E'_n(x) = e^{-nx} - nxe^{-nx} = e^{-nx}(1 - nx)$$

$$E'_n(x) = 0 \implies 1 - nx = 0 \implies x = 1/n.$$

4. **Valeur max :** $M_n = E_n(1/n) = \frac{1}{n}e^{-n(1/n)} = \frac{1}{ne}$.
5. **Conclusion :** $\lim_{n \rightarrow \infty} M_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{ne} = 0$. La convergence est donc **uniforme**.

Exemple : Limite d'une suite de fonctions (Examen août 2025)

Énoncé : On considère la suite de fonctions $f_n(x) = \frac{1}{1+e^{-nx}}$ sur $\mathbb{R}$.

1. Calculez l'expression analytique de la fonction limite simple $F(x)$.
2. L'affirmation "La suite converge uniformément vers F " est-elle vraie ou fausse ? Justifiez.

Résolution :

1. **Limite simple :** On évalue $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ selon le signe de x :

- Si $x > 0$: $e^{-nx} \rightarrow 0$, donc $f_n(x) \rightarrow \frac{1}{1+0} = 1$.
- Si $x < 0$: $e^{-nx} \rightarrow +\infty$, donc $f_n(x) \rightarrow \frac{1}{1+\infty} = 0$.
- Si $x = 0$: $e^{-nx} = e^0 = 1$, donc $f_n(x) \rightarrow \frac{1}{1+1} = 1/2$.

La fonction limite est donc définie par morceaux :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1/2 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

2. **Convergence uniforme : Faux.**

D'après le théorème de continuité, si une suite de fonctions *continues* converge *uniformément*, alors la fonction limite doit être *continue*. Ici, chaque fonction $f_n(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$, mais la fonction limite $F(x)$ **n'est pas continue en $x = 0$** . On en déduit immédiatement que la convergence n'est pas uniforme.

10 Fonctions à plusieurs variables

Examen : ~100%

✓ Astuce : Priorité Examen

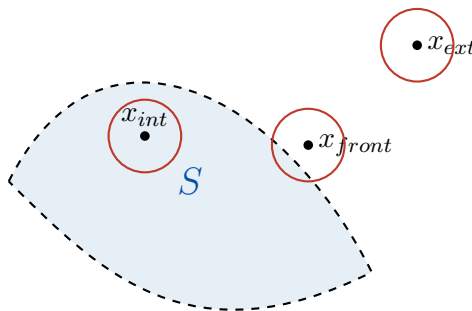
Ce chapitre est systématiquement évalué, souvent via une grande question divisée en sous-parties : (a) montrer qu'une limite n'existe pas, (b) calculer le plan tangent, (c) trouver et classer les points critiques. Maîtrisez parfaitement le critère de la Hessienne !

10.1 Topologie de $\mathbb{R}^n$

Définition : Vocabulaire topologique

Soit un ensemble $S \subset \mathbb{R}^n$.

- **Boule ouverte** $B(x_0, r)$: ensemble des points x tels que $\|x - x_0\| < r$.
- **Point intérieur** : x est intérieur à S s'il existe une boule centrée en x entièrement contenue dans S . L'**intérieur** est l'ensemble de ces points.
- **Point frontière** : x est sur la frontière de S si toute boule centrée en x contient à la fois des points de S et des points n'appartenant pas à S . L'ensemble de ces points est la **frontière**.
- **Ensemble ouvert** : S est ouvert si tous ses points sont intérieurs (il ne contient pas sa frontière).
- **Ensemble fermé** : S est fermé s'il contient toute sa frontière. L'ensemble complémentaire d'un fermé est un ouvert.
- **Fermeture (Adhérence)** : L'union d'un ensemble et de sa frontière.
- **Connexe par arcs** : S est connexe par arcs si deux points quelconques de S peuvent être reliés par un chemin (courbe continue) entièrement contenu dans S .



Exemple : Topologie d'un segment (Décembre 2018 - Q1f)

Énoncé : Soit $S = \{(x, 1) \in \mathbb{R}^2 \mid 2 \leq x \leq 3\}$. Analysez ses propriétés topologiques.

Résolution : C'est un segment de droite dans le plan 2D.

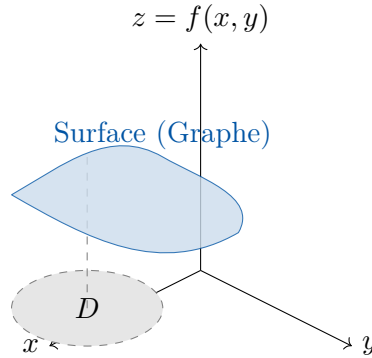
- **Intérieur** : L'intérieur est **vide**. Aucune boule ouverte en 2D (aussi petite soit-elle) ne peut être entièrement contenue dans une ligne (qui est de dimension 1).
- **Frontière** : Tout point de S est sur la frontière. En effet, toute boule autour d'un point de S débordera de la ligne et contiendra des points n'appartenant pas à S . La frontière est donc S tout entier.
- **Ouvert** : **Non**, car il ne contient pas son intérieur (qui est vide).
- **Fermé** : **Oui**, car il contient tous ses points frontières (puisque la frontière est S elle-même).

10.2 Graphes, Ensembles de niveau et Classes de fonctions

Définition : Graphe et ensemble de niveau

Pour une fonction $f(x, y)$:

- Le **Graphe** est la surface $z = f(x, y)$ dans $\mathbb{R}^3$.
- Un **Ensemble de niveau** (ou courbe de niveau) pour une constante k est l'ensemble des points (x, y) du domaine tels que $f(x, y) = k$.



Définition : Classes de fonctions (C^0, C^1, C^2)

- **Classe C^0** : La fonction est continue.
- **Classe C^1** : Les dérivées partielles premières existent et sont continues.
- **Classe C^2** : Les dérivées partielles secondes existent et sont continues (le théorème de Clairaut $f_{xy} = f_{yx}$ s'applique alors).

10.3 Limites et Continuité

Définition : Continuité en un point dans $\mathbb{R}^2$

Une fonction $f(x, y)$ est continue au point (a, b) si, pour tout écart toléré sur les images, on peut trouver un voisinage autour du point tel que les images y restent :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \|(x, y) - (a, b)\| < \delta \implies |f(x, y) - f(a, b)| < \varepsilon$$

ce qui équivaut à écrire $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = f(a, b)$.

Exemple : Continuité d'une fonction de deux variables (définition $\varepsilon - \delta$)

Énoncé : Montrez que la fonction $f(x, y) = 2x^2 + y^2$ est continue en $(0, 0)$ en utilisant la définition.

Résolution : On doit montrer que $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tel que $\|(x, y) - (0, 0)\| < \delta \implies |f(x, y) - f(0, 0)| < \varepsilon$.

Ici, $\|(x, y) - (0, 0)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$. On cherche donc à majorer $|2x^2 + y^2 - 0| = 2x^2 + y^2$. On sait que $x^2 \leq x^2 + y^2$ et $y^2 \leq x^2 + y^2$, donc on peut majorer de la manière suivante :

$$2x^2 + y^2 \leq 2(x^2 + y^2) = 2 \left(\sqrt{x^2 + y^2} \right)^2$$

Si on suppose $\sqrt{x^2 + y^2} < \delta$, alors on a la majoration :

$$|f(x, y) - f(0, 0)| < 2\delta^2$$

Pour que cette quantité soit inférieure ou égale à ε , il suffit d'imposer $2\delta^2 \leq \varepsilon$, c'est-à-dire $\delta \leq \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}$.

Rédaction propre : Soit $\varepsilon > 0$. Posons $\delta = \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}} > 0$. Pour tout (x, y) tel que $\sqrt{x^2 + y^2} < \delta$, on a :

$$|f(x, y) - f(0, 0)| = 2x^2 + y^2 \leq 2(x^2 + y^2) < 2\delta^2 = 2 \left(\sqrt{\frac{\varepsilon}{2}} \right)^2 = \varepsilon$$

La fonction est donc bien continue en $(0, 0)$. $\square$

Théorème : Existence d'une limite dans $\mathbb{R}^2$

Pour que $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = L$, la limite doit valoir L **quelle que soit la direction** ou la courbe d'approche vers (a, b) .

► Procédure : Prouver qu'une limite n'existe pas en $(0, 0)$

L'objectif est de trouver **deux chemins différents** qui donnent deux limites différentes.

1. **Chemin 1 (Axe X)** : Poser $y = 0$, et calculer $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, 0) = L_1$.
2. **Chemin 2 (Axe Y)** : Poser $x = 0$, et calculer $\lim_{y \rightarrow 0} f(0, y) = L_2$.
 - Si $L_1 \neq L_2$, la limite n'existe pas. Fini !
 - Si $L_1 = L_2$, il faut essayer un autre chemin.
3. **Chemin 3 (Droites)** : Poser $y = mx$ (où m est une constante), et calculer la limite selon x . Si la limite dépend de m , alors elle n'existe pas.
4. **Chemin 4 (Paraboles, etc.)** : Si les degrés au numérateur/dénominateur sont déséquilibrés, tester $y = x^2$ ou $x = y^2$ pour équilibrer les puissances.

10.4 Dérivées partielles, Gradient et Plan Tangent

Définition : Dérivées partielles par la limite

Les dérivées partielles d'une fonction $f(x, y)$ au point (x_0, y_0) sont définies par les limites (si elles existent) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + t, y_0) - f(x_0, y_0)}{t} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + t) - f(x_0, y_0)}{t} \end{aligned}$$

Elles représentent les taux de variation instantanés de f respectivement le long de l'axe X et de l'axe Y .

Définition : Différentiabilité en un point

Une fonction $f(x, y)$ est **différentiable** en (x_0, y_0) si elle peut y être approchée localement par un plan tangent. Formellement, il faut que la limite de l'erreur d'approximation divisée par la distance soit nulle :

$$\lim_{(dx, dy) \rightarrow (0, 0)} \frac{f(x_0 + dx, y_0 + dy) - \left[f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)dy \right]}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} = 0$$

Le terme entre crochets est l'approximation linéaire $f(x_0, y_0) + L(dx, dy)$.

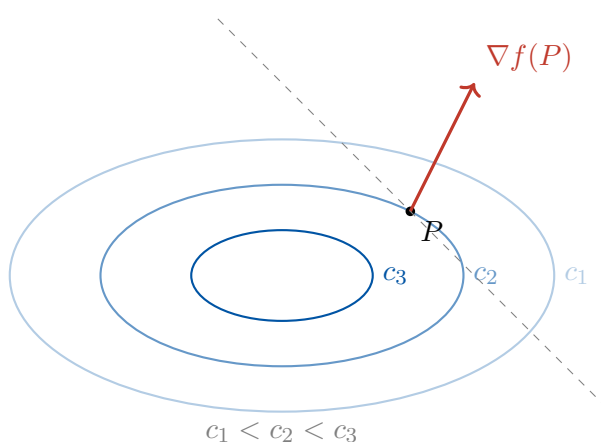
Condition suffisante : Si f est de classe C^1 (dérivées partielles continues) au voisinage de (x_0, y_0) , alors f est différentiable en ce point.

Définition : Gradient

Le gradient d'une fonction $f(x, y)$ scalaire est le vecteur de ses dérivées partielles premières :

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

Il pointe dans la direction de la **plus grande pente** (taux d'accroissement maximal).



Théorème : Équation du plan tangent

L'équation du plan tangent à la surface $z = f(x, y)$ au point (x_0, y_0, z_0) où $z_0 = f(x_0, y_0)$ est :

$$z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot (y - y_0)$$

Cette équation fournit aussi la **linéarisation** (approximation affine) de f près de (x_0, y_0) .

Théorème : Dérivée directionnelle

Le taux de variation de f dans la direction d'un vecteur **unitaire** $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ est :

$$D_{\mathbf{u}}f(x, y) = \nabla f(x, y) \cdot \mathbf{u} = \frac{\partial f}{\partial x}u_1 + \frac{\partial f}{\partial y}u_2$$

Théorème : Gradient et surfaces de niveau

Pour une fonction $f(x, y, z)$ de trois variables et une surface de niveau $f(x, y, z) = k$:

- Le gradient ∇f est **perpendiculaire** à la surface de niveau en chaque point.
- La **normale unitaire** à la surface au point P est : $\hat{n} = \frac{\nabla f(P)}{\|\nabla f(P)\|}$.
- Pour trouver un point à distance d le long de la normale extérieure : $S = P + d\hat{n}$.

10.5 Règle de composition (Chain Rule)

► Procédure : Les 4 cas de la règle de la chaîne (Composées)

La composée de fonctions différentiables est différentiable. L'idée est de sommer les contributions de chaque variable intermédiaire via un arbre de dépendance.

1. **Cas 1** ($\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$) : Fonctions à 1 variable classiques.

$$g(f(t))' = g'(f(t)) \cdot f'(t)$$

Exemple : $g(x) = e^x$, $f(t) = t^2 \implies \frac{d}{dt}(e^{t^2}) = e^{t^2} \cdot 2t$.

2. **Cas 2** ($\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$) : Dérivée par rapport à un paramètre t (ex : trajectoire). $h(t) = f(x(t), y(t))$.

$$h'(t) = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot y'(t)$$

Exemple : $f(x, y) = x^2 y$, avec $x(t) = \cos(t)$, $y(t) = e^t$.

$$h'(t) = (2xy)(-\sin(t)) + (x^2)(e^t) = -2\cos(t)e^t \sin(t) + \cos^2(t)e^t.$$

3. **Cas 3** ($\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$) : Composition externe par une fonction d'une variable. $h(x, y) = g(f(x, y))$.

$$\frac{\partial h}{\partial x} = g'(f(x, y)) \cdot \frac{\partial f}{\partial x} \quad (\text{pareil pour } y)$$

Exemple : $g(u) = \sin(u)$, $f(x, y) = x^2 + y^2$.

$$\frac{\partial}{\partial x}[\sin(x^2 + y^2)] = \cos(x^2 + y^2) \cdot 2x.$$

4. **Cas 4** ($\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$) : Changement de coordonnées général. $h(u, v) = f(x(u, v), y(u, v))$.

$$\frac{\partial h}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} \quad (\text{pareil pour } v)$$

Exemple : $f(x, y) = xy$, avec $x(u, v) = u + v$, $y(u, v) = u - v$.

$$\frac{\partial h}{\partial u} = (y) \cdot (1) + (x) \cdot (1) = (u - v) + (u + v) = 2u.$$

Exemple : Règle de la chaîne à l'ordre 1 et 2 (Décembre 2018 - Q2)

Énoncé : Soit $h(t) = f(t, 2t^2)$. Calculer $h'(t)$ et $h''(0)$ en fonction des dérivées partielles de f .

Résolution : On applique le **Cas 2** ($\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$) avec $x(t) = t$ et $y(t) = 2t^2$.

1. **Dérivée première** $h'(t)$:

$$h'(t) = f_x(t, 2t^2) \cdot (t)' + f_y(t, 2t^2) \cdot (2t^2)' = f_x(t, 2t^2) + 4tf_y(t, 2t^2)$$

2. **Dérivée seconde** $h''(t)$: On dérive $h'(t)$ par rapport à t .

— Dérivée de $f_x(t, 2t^2)$ (encore le Cas 2!) : $f_{xx} \cdot 1 + f_{xy} \cdot 4t$.

— Dérivée de $4tf_y(t, 2t^2)$ (règle du produit) : $4 \cdot f_y + 4t \cdot (f_{yx} \cdot 1 + f_{yy} \cdot 4t)$.

En additionnant le tout :

$$\begin{aligned} h''(t) &= (f_{xx} + 4tf_{xy}) + 4f_y + 4t(f_{yx} + 4tf_{yy}) \\ &= f_{xx} + 8tf_{xy} + 16t^2f_{yy} + 4f_y \quad (\text{car par Schwarz, } f_{xy} = f_{yx}) \end{aligned}$$

3. **Évaluation en $t = 0$** : Les termes en t s'annulent, ce qui simplifie grandement l'expression :

$$h''(0) = f_{xx}(0, 0) + 4f_y(0, 0)$$

10.6 Optimisation : Extremums locaux et points selles

► Procédure : Recherche et classification des extremums (Très fréquent)

Soit $f(x, y)$ une fonction de classe C^2 .

1. **Trouver les points critiques** : Résoudre le système non linéaire $\nabla f(x, y) = (0, 0)$:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases}$$

Astuce : Factoriser au maximum. Ne jamais diviser par une variable sans vérifier le cas où elle est nulle !

2. **Calculer les dérivées partielles secondes** : $f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, $f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$. (Par le théorème de Clairaut, $f_{xy} = f_{yx}$).
3. **Former le déterminant de la matrice Hessienne (ou discriminant D)** :

$$D(x, y) = f_{xx} \cdot f_{yy} - (f_{xy})^2$$

4. **Évaluer en chaque point critique (x_0, y_0) et classier** :

- Si $D > 0$ et $f_{xx} > 0 \implies$ Minimum local
- Si $D > 0$ et $f_{xx} < 0 \implies$ Maximum local
- Si $D < 0 \implies$ Point selle (col)
- Si $D = 0 \implies$ Le test est **non concluant** (il faut utiliser une autre méthode, par exemple analyser le signe de $f(x, y) - f(x_0, y_0)$ au voisinage du point).

Exemple : Optimisation (type examen)

Énoncé : Trouver et classier les points critiques de $f(x, y) = x^3 - 3x + 3xy^2$.

Résolution :

1. **Points critiques** (Gradient nul) :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 3 + 3y^2 = 0 \implies x^2 + y^2 = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 6xy = 0$$

2. De l'équation 2, on a soit $x = 0$, soit $y = 0$.

- Si $x = 0$, l'éq 1 donne $0^2 + y^2 = 1 \implies y = \pm 1$. Points : $(0, 1)$ et $(0, -1)$.
- Si $y = 0$, l'éq 1 donne $x^2 + 0^2 = 1 \implies x = \pm 1$. Points : $(1, 0)$ et $(-1, 0)$.

On a 4 points critiques : $(0, 1)$, $(0, -1)$, $(1, 0)$, $(-1, 0)$.

3. **Dérivées secondes** : $f_{xx} = 6x$, $f_{yy} = 6x$, $f_{xy} = 6y$.
4. **Discriminant D** : $D(x, y) = (6x)(6x) - (6y)^2 = 36x^2 - 36y^2 = 36(x^2 - y^2)$.
5. **Classification** :

- Au point $(1, 0)$: $D = 36(1 - 0) = 36 > 0$. Et $f_{xx}(1, 0) = 6 > 0 \implies$ **Minimum local**.
- Au point $(-1, 0)$: $D = 36(1 - 0) = 36 > 0$. Et $f_{xx}(-1, 0) = -6 < 0 \implies$ **Maximum local**.
- Au point $(0, 1)$: $D = 36(0 - 1) = -36 < 0 \implies$ **Point selle**.
- Au point $(0, -1)$: $D = 36(0 - 1) = -36 < 0 \implies$ **Point selle**.

Exemple : Satellite sur la normale à une surface (Examen jan. 2026, Q5)

Énoncé : La surface d'un astéroïde est définie par $\left(\frac{x}{3}\right)^4 + \frac{y^2}{6} + \frac{2z^2}{9} = \frac{11}{3}$. On veut placer un satellite au point S situé à 6 km à la verticale du point $P = (3, 2, 3)$ le long de la normale extérieure. Calculez S .

Résolution :

1. **Identifier la surface de niveau :** C'est la surface $f(x, y, z) = \frac{11}{3}$ où $f = \left(\frac{x}{3}\right)^4 + \frac{y^2}{6} + \frac{2z^2}{9}$.
2. **Calculer le gradient** (qui est la normale) :

$$\nabla f = \left(\frac{4x^3}{81}, \frac{y}{3}, \frac{4z}{9} \right) \implies N = \nabla f(3, 2, 3) = \left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3} \right)$$

$$3. \text{ Norme : } \|N\| = \sqrt{\frac{16}{9} + \frac{4}{9} + \frac{16}{9}} = \sqrt{\frac{36}{9}} = 2.$$

4. **Position du satellite :**

$$S = P + 6 \cdot \frac{N}{\|N\|} = (3, 2, 3) + 3 \cdot \left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3} \right) = (3, 2, 3) + (4, 2, 4) = \boxed{(7, 4, 7)}$$

Exemple : Janvier 2026 - Question 6 - Étude d'une fonction de deux variables

Soit la fonction de deux variables $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie en tout point (x, y) par

$$f(x, y) = |xy - x - y|.$$

6a. Calculez la valeur du gradient de la fonction f au point $(x, y) = (1, 2)$, ou démontrez qu'il n'existe pas.

Résolution :

Par définition, la première dérivée partielle en $(1, 2)$ vaut :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(1, 2) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(1+t, 2) - f(1, 2)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{|(1+t)2 - (1+t) - 2| - |2 - 1 - 2|}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{|t - 1| - 1}{t} \end{aligned}$$

On utilise le fait que quand t est proche de zéro l'expression $t-1$ est négative, et donc $|t-1| = 1-t$. On a ensuite :

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{(1-t) - 1}{t} = -1.$$

De même pour la seconde dérivée partielle :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y}(1, 2) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(1, 2+t) - f(1, 2)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{|1(2+t) - 1 - (2+t)| - 1}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{|-1| - 1}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{0}{t} = 0. \end{aligned}$$

Le gradient demandé est donc égal à $\nabla f(1, 2) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

6b. La fonction f est-elle différentiable au point $(x, y) = (1, 2)$? Justifiez soigneusement.

Résolution :

La fonction est bien différentiable, et on peut le démontrer de façon classique avec la définition. Au vu du point 6a, la différentielle au point $(x, y) = (1, 2)$, si elle existe, doit valoir :

$$L(dx, dy) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = -dx.$$

Remplaçons dans la définition : pour que f soit différentiable, la limite suivante doit être nulle :

$$\lim_{(dx, dy) \rightarrow (0, 0)} \frac{f(1 + dx, 2 + dy) - (f(1, 2) + L(dx, dy))}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$$

Examinons le numérateur :

$$\begin{aligned} & |(1 + dx)(2 + dy) - (1 + dx) - (2 + dy)| - 1 - (-dx) \\ &= |2 + 2dx + dy + dx dy - 1 - dx - 2 - dy| - 1 + dx \\ &= |dx + dx dy - 1| - 1 + dx \end{aligned}$$

Puisque (dx, dy) tend vers zéro, le terme $dx + dx dy - 1$ tend vers -1 , et en particulier devient négatif, ce qui permet d'évaluer la valeur absolue. Le numérateur devient alors :

$$-(dx + dx dy - 1) - 1 + dx = -dx - dx dy + 1 - 1 + dx = -dx dy.$$

Au final il faut donc examiner la limite suivante :

$$\lim_{(dx, dy) \rightarrow (0, 0)} \frac{-dx dy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} = 0$$

On utilise l'inégalité évidente d'où $\left| \frac{dy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} \right| \leq 1$. Ainsi :

$$\left| \frac{-dx dy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} \right| = |-dx| \left| \frac{dy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} \right| \leq |dx|$$

Comme $|dx| \rightarrow 0$, on conclut par le théorème de l'étau que la limite est bien nulle.

Remarque. Une façon beaucoup plus rapide de prouver la différentiabilité consiste à constater que f est la composée du polynôme $p(x, y) = xy - x - y$ et de la fonction valeur absolue. Or on voit que le polynôme p est partout différentiable, et la valeur absolue est aussi dérivable (donc différentiable) au point considéré, vu que $p(1, 2) = -1 \neq 0$ (le seul point où la valeur absolue $|z|$ n'est pas dérivable est $z = 0$). Par conséquent la composée f est bien différentiable en $(x, y) = (1, 2)$.

A Formulaire compact

Complexes – Formules essentielles

Forme polaire :

$$z = re^{i\theta} = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \arg z = \arctan(b/a)$$

$$z\bar{z} = |z|^2$$

Puissances :

$$z^n = r^n e^{in\theta}$$

$$z_k^{1/n} = r^{1/n} e^{i(\theta+2k\pi)/n}$$

Racines n -ièmes de 1 :

$$w_k = e^{2ik\pi/n}$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} w_k = 0$$

$$x^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1} (x - w_k)$$

Identités :

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

$$e^{2i\pi} = 1$$

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

$$\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

$$|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$$

$$\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$$

Séries – Formules essentielles

Géométrie :

$$\sum_{k=0}^n r^k = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} r^k = \frac{1}{1 - r}$$

Riemann : $\sum 1/n^p$ CV $\Leftrightarrow p > 1$

Ratio test :

$$L = \lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \begin{cases} < 1 : \text{CV abs.} \\ > 1 : \text{div.} \end{cases}$$

Leibniz : $\sum (-1)^n a_n$ CV si $a_n \searrow 0$

Comparaison : $0 \leq a_n \leq b_n$, $\sum b_n$ CV $\Rightarrow \sum a_n$ CV

Rayon de convergence :

$$R = \frac{1}{\lim |a_{n+1}/a_n|}$$

Dérivation terme à terme :

$$S'(x) = \sum n a_n x^{n-1} \quad (|x| < R)$$

Continuité & Limites – L'essentiel

Continuité uniforme ($\varepsilon - \delta$) : Trouver un majorant $|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$. Choisir $\delta = \varepsilon/K$.

Taylor (pour limites 0/0) :

$$\sin x \approx x - x^3/6$$

$$\cos x \approx 1 - x^2/2$$

$$e^x \approx 1 + x + x^2/2$$

Multiplés variables : Si limite dépend de m (droite $y = mx$) $\rightarrow$ **N'existe pas**.

Si passage polaire $f(r, \theta) \leq g(r)$ avec $\lim_{r \rightarrow 0} g(r) = 0 \rightarrow$ **Limite = 0**.

Intégrales & EDO – Formules clés

Primitives usuelles :

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right)$$

$$\int \ln x \, dx = x \ln x - x$$

$$\int \tan x \, dx = -\ln |\cos x|$$

Longueur d'arc : $L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} \, dx$

EDO 1er ordre (Facteur Intég.) $y' +$

$$P(x)y = Q(x)$$

$$\mu(x) = \exp\left(\int P(x)dx\right)$$

EDO 2nd ordre - Caractéristique $ar^2 +$

$$br + c = 0$$

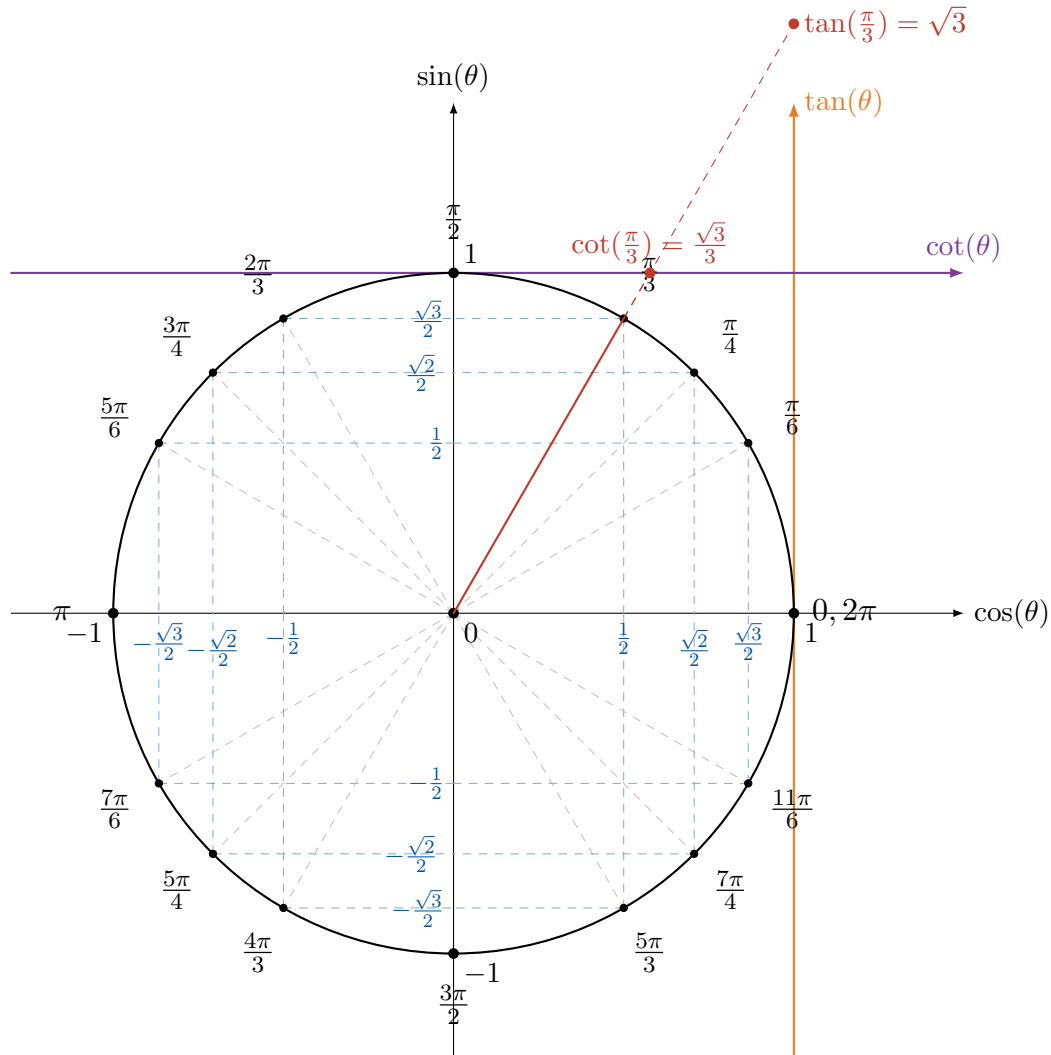
$$\Delta > 0 \implies C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$$

$$\Delta = 0 \implies (C_1 + C_2 x) e^{rx}$$

$$\Delta < 0 \implies e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$$

B Cercle Trigonométrique et Valeurs Remarquables

Le cercle trigonométrique est le cercle de rayon 1 centré à l'origine. Il permet de lire directement le cosinus (abscisse) et le sinus (ordonnée) d'un angle. L'axe de la tangente est la droite verticale d'équation $x = 1$. L'axe de la cotangente est la droite horizontale d'équation $y = 1$.



Angle (rad)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
Angle (deg)	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°
$\sin(\theta)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1
$\cos(\theta)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$\tan(\theta)$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$
$\cot(\theta)$	$\pm\infty$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\pm\infty$	0

TABLE 1 – Valeurs remarquables des fonctions trigonométriques.

C Fonctions Trigonométriques

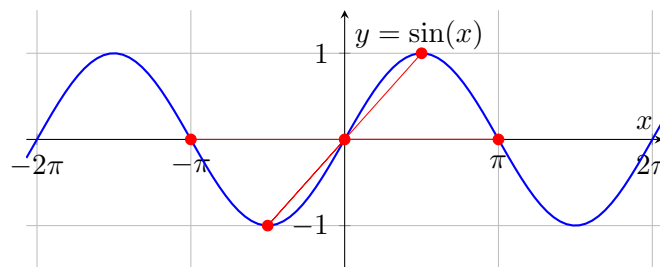
✓ Astuce : Lien avec les complexes

Grâce à la **formule d'Euler** $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$, on peut exprimer toutes les fonctions trigonométriques via des exponentielles complexes. Évaluée en des angles clés comme $x = \pi$ ou $x = 2\pi$, on obtient les **identités remarquables** :

$$e^{i\pi} + 1 = 0 \quad \text{et} \quad e^{2i\pi} = 1$$

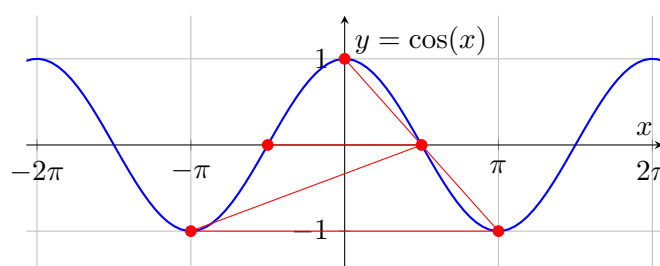
C.1 1. Sinus (sin)

- **Définition** : Ordonnée du point correspondant sur le cercle trigonométrique.
- **Formule complexe** : $\sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$
- **Domaine** : $\mathbb{R}$ **Image** : $[-1, 1]$
- **Dérivée** : $\sin'(x) = \cos(x)$
- **Asymptotes** : Aucune.
- **Points remarquables** :
 - Intersections axes : $(k\pi, 0)$ avec $k \in \mathbb{Z}$, et $(0, 0)$.
 - Extremums : Maximums en $(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, 1)$, minimums en $(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, -1)$.
 - Symétrie : Fonction impaire.



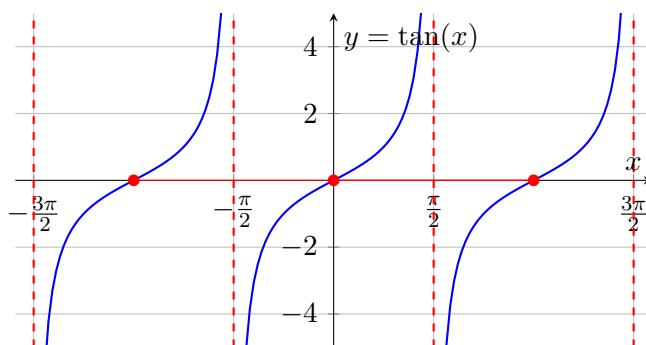
C.2 2. Cosinus (cos)

- **Définition** : Abscisse du point correspondant sur le cercle trigonométrique.
- **Formule complexe** : $\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$
- **Domaine** : $\mathbb{R}$ **Image** : $[-1, 1]$
- **Dérivée** : $\cos'(x) = -\sin(x)$
- **Asymptotes** : Aucune.
- **Points remarquables** :
 - Intersections axes : $(\frac{\pi}{2} + k\pi, 0)$, et $(0, 1)$.
 - Extremums : Maximums en $(2k\pi, 1)$, minimums en $(\pi + 2k\pi, -1)$.
 - Symétrie : Fonction paire.



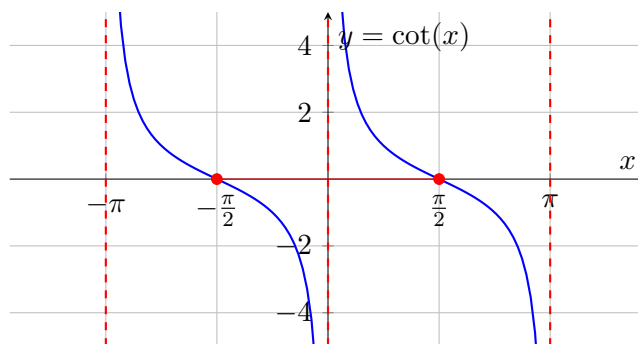
C.3 3. Tangente (tan)

- **Définition** : $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$
- **Formule complexe** : $\tan(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{i(e^{ix} + e^{-ix})}$
- **Domaine** : $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi\}$ **Image** : $\mathbb{R}$
- **Dérivée** : $\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$
- **Asymptotes** : Verticales en $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$.
- **Points remarquables** :
 - Intersections axes : $(k\pi, 0)$.
 - Symétrie : Fonction impaire. Centre de symétrie en $(k\pi, 0)$.



C.4 4. Cotangente (cot)

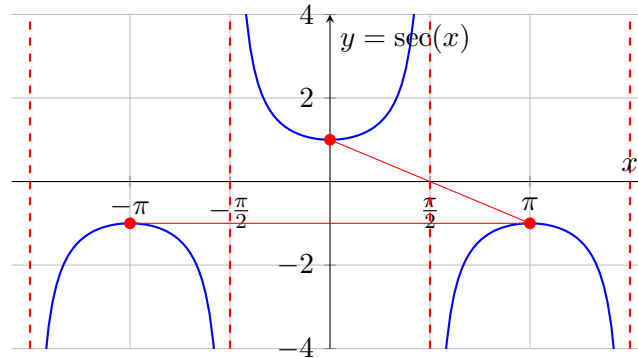
- **Définition** : $\cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$
- **Formule complexe** : $\cot(x) = \frac{i(e^{ix} + e^{-ix})}{e^{ix} - e^{-ix}}$
- **Domaine** : $\mathbb{R} \setminus \{k\pi\}$ **Image** : $\mathbb{R}$
- **Dérivée** : $\cot'(x) = -\frac{1}{\sin^2(x)} = -(1 + \cot^2(x))$
- **Asymptotes** : Verticales en $x = k\pi$.
- **Points remarquables** :
 - Intersections axes : $(\frac{\pi}{2} + k\pi, 0)$.
 - Symétrie : Fonction impaire. Centre de symétrie en $(\frac{\pi}{2} + k\pi, 0)$.



C.5 5. Sécante (sec)

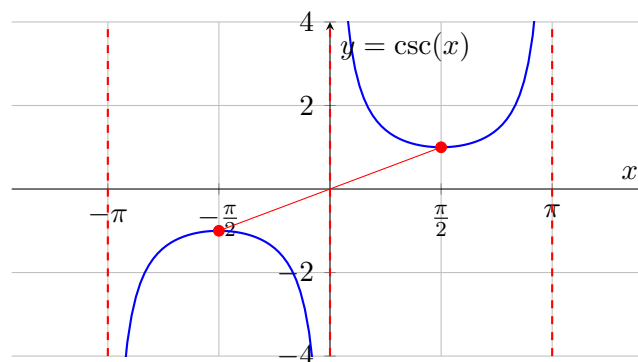
- **Définition** : $\sec(x) = \frac{1}{\cos(x)}$
- **Formule complexe** : $\sec(x) = \frac{2}{e^{ix} + e^{-ix}}$
- **Domaine** : $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi\}$ **Image** : $]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$

- **Dérivée** : $\sec'(x) = \sec(x) \tan(x)$
- **Asymptotes** : Verticales en $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$.
- **Points remarquables** :
 - Intersections axes : $(0, 1)$. Ne s'annule jamais.
 - Extremums : Minimums locaux en $(2k\pi, 1)$, maximums locaux en $(\pi + 2k\pi, -1)$.
 - Symétrie : Fonction paire.



C.6 6. Cosécante (csc)

- **Définition** : $\csc(x) = \frac{1}{\sin(x)}$
- **Formule complexe** : $\csc(x) = \frac{2i}{e^{ix} - e^{-ix}}$
- **Domaine** : $\mathbb{R} \setminus \{k\pi\}$ **Image** : $] -\infty, -1] \cup [1, +\infty[$
- **Dérivée** : $\csc'(x) = -\csc(x) \cot(x)$
- **Asymptotes** : Verticales en $x = k\pi$.
- **Points remarquables** :
 - Intersections axes : Aucune.
 - Extremums : Minimums locaux en $(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, 1)$, maximums locaux en $(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, -1)$.
 - Symétrie : Fonction impaire.



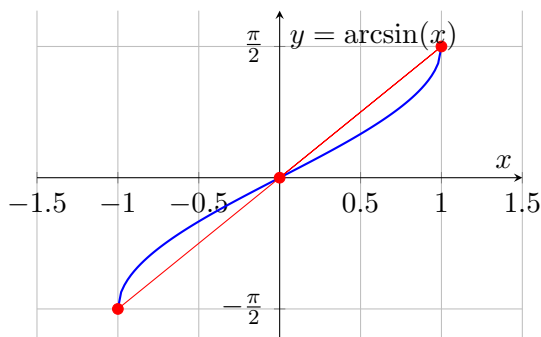
D Fonctions Trigonométriques Réciproques

D.1 1. Arcsinus (arcsin)

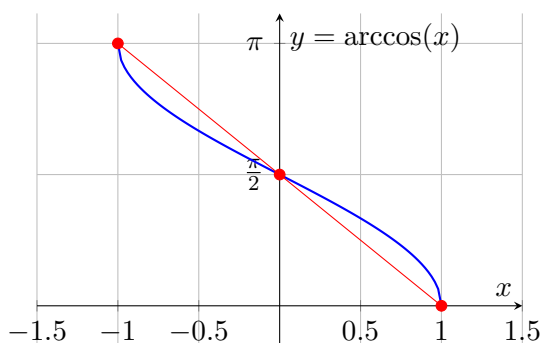
- **Définition** : Fonction réciproque de la restriction du sinus à $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
- **Domaine** : $[-1, 1]$ **Image** : $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
- **Dérivée** : $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- **Asymptotes** : Aucune.

— **Points remarquables :**

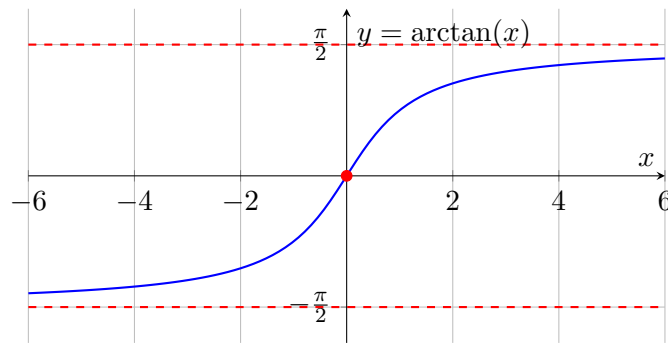
- Intersections : $(0, 0)$.
- Extremums : Minimum en $(-1, -\frac{\pi}{2})$, Maximum en $(1, \frac{\pi}{2})$.
- Symétrie : Fonction impaire.

**D.2 2. Arccosinus (arccos)**

- **Définition :** Fonction réciproque de la restriction du cosinus à $[0, \pi]$.
- **Domaine :** $[-1, 1]$ **Image :** $[0, \pi]$
- **Dérivée :** $\arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- **Asymptotes :** Aucune.
- **Points remarquables :**
 - Intersections : $(0, \frac{\pi}{2})$ et $(1, 0)$.
 - Extremums : Maximum en $(-1, \pi)$, Minimum en $(1, 0)$.

**D.3 3. Arctangente (arctan)**

- **Définition :** Fonction réciproque de la restriction de la tangente à $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.
- **Domaine :** $\mathbb{R}$ **Image :** $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$
- **Dérivée :** $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$
- **Asymptotes :** Horizontales en $y = \frac{\pi}{2}$ (en $+\infty$) et $y = -\frac{\pi}{2}$ (en $-\infty$).
- **Points remarquables :**
 - Intersections : $(0, 0)$.
 - Symétrie : Fonction impaire.



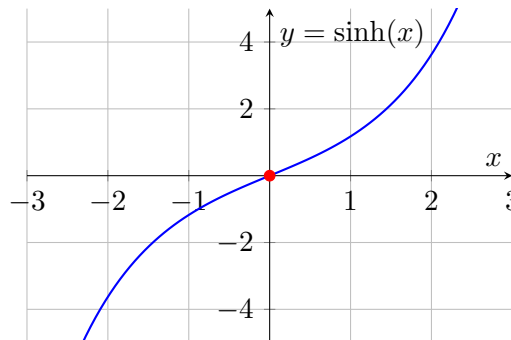
E Fonctions Hyperboliques

✓ Astuce : Lien avec les complexes et la trigonométrie

Les fonctions hyperboliques sont intimement liées aux fonctions trigonométriques circulaires via les nombres complexes ($x \mapsto ix$). L'analogie se poursuit avec l'identité fondamentale $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$, pendant hyperbolique de $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$.

E.1 1. Sinus hyperbolique ($\sinh$)

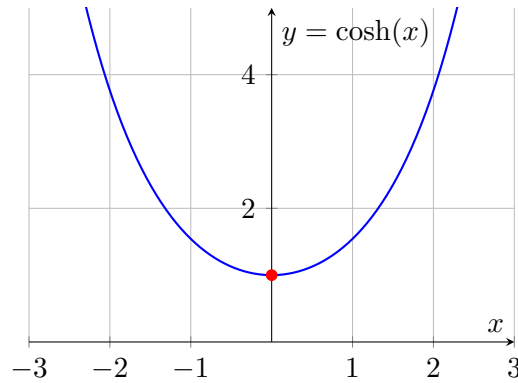
- **Définition** : $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$
- **Lien complexe** : $\sinh(ix) = i \sin(x)$ et $\sinh(x) = -i \sin(ix)$
- **Domaine** : $\mathbb{R}$ **Image** : $\mathbb{R}$
- **Dérivée** : $\sinh'(x) = \cosh(x)$
- **Asymptotes** : Aucune.
- **Points remarquables** :
 - Intersections : $(0, 0)$.
 - Symétrie : Fonction impaire.



E.2 2. Cosinus hyperbolique ($\cosh$)

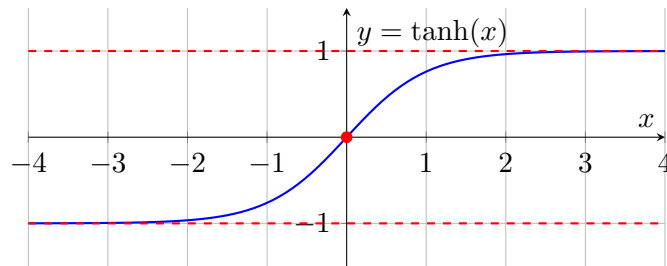
- **Définition** : $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$
- **Lien complexe** : $\cosh(ix) = \cos(x)$ et $\cosh(x) = \cos(ix)$
- **Domaine** : $\mathbb{R}$ **Image** : $[1, +\infty[$
- **Dérivée** : $\cosh'(x) = \sinh(x)$
- **Asymptotes** : Aucune.
- **Points remarquables** :
 - Intersections : $(0, 1)$.

- Extremums : Minimum absolu en $(0, 1)$.
- Symétrie : Fonction paire.



E.3 3. Tangente hyperbolique ($\tanh$)

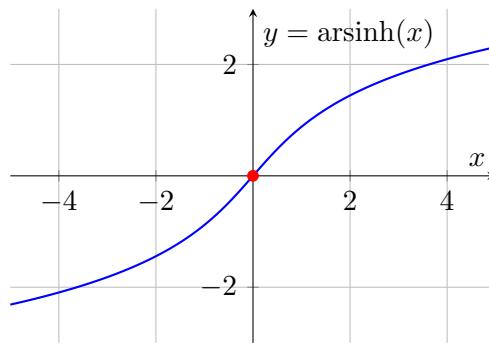
- **Définition** : $\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$
- **Lien complexe** : $\tanh(ix) = i \tan(x)$ et $\tanh(x) = -i \tan(ix)$
- **Domaine** : $\mathbb{R}$ **Image** : $] -1, 1[$
- **Dérivée** : $\tanh'(x) = \frac{1}{\cosh^2(x)} = 1 - \tanh^2(x)$
- **Asymptotes** : Horizontales en $y = 1$ (en $+\infty$) et $y = -1$ (en $-\infty$).
- **Points remarquables** :
 - Intersections : $(0, 0)$.
 - Symétrie : Fonction impaire.



F Fonctions Hyperboliques Réciproques

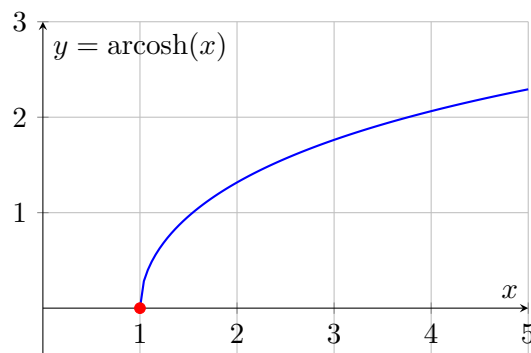
F.1 1. Argument sinus hyperbolique (arsinh)

- **Définition** : Fonction réciproque de $\sinh(x)$. $\operatorname{arsinh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$
- **Domaine** : $\mathbb{R}$ **Image** : $\mathbb{R}$
- **Dérivée** : $\operatorname{arsinh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$
- **Asymptotes** : Aucune.
- **Points remarquables** :
 - Intersections : $(0, 0)$.
 - Symétrie : Fonction impaire.



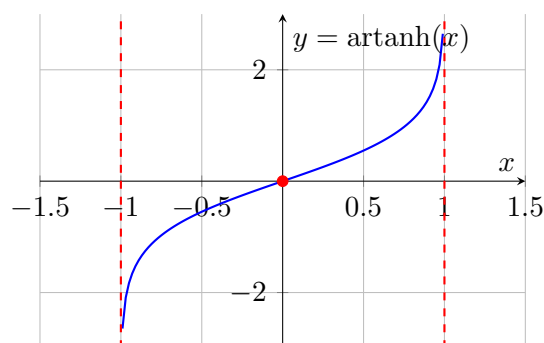
F.2 2. Argument cosinus hyperbolique (arcosh)

- **Définition** : Fonction réciproque de la restriction de $\cosh(x)$ à $[0, +\infty[$. $\operatorname{arcosh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$
- **Domaine** : $[1, +\infty[$ **Image** : $[0, +\infty[$
- **Dérivée** : $\operatorname{arcosh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$ (pour $x > 1$)
- **Asymptotes** : Aucune.
- **Points remarquables** :
 - Intersections : $(1, 0)$.



F.3 3. Argument tangente hyperbolique (artanh)

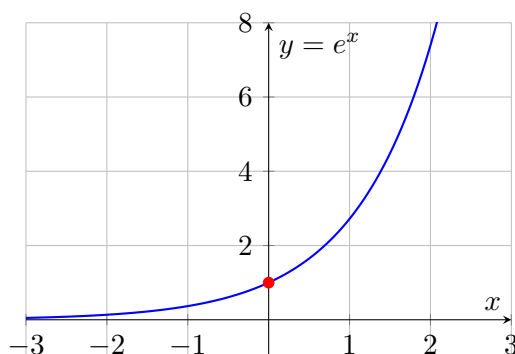
- **Définition** : Fonction réciproque de $\tanh(x)$. $\operatorname{artanh}(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$
- **Domaine** : $] -1, 1[$ **Image** : $\mathbb{R}$
- **Dérivée** : $\operatorname{artanh}'(x) = \frac{1}{1-x^2}$
- **Asymptotes** : Verticales en $x = 1$ et $x = -1$.
- **Points remarquables** :
 - Intersections : $(0, 0)$.
 - Symétrie : Fonction impaire.



G Fonctions Exponentielles et Logarithmiques

G.1 1. Exponentielle naturelle (e^x)

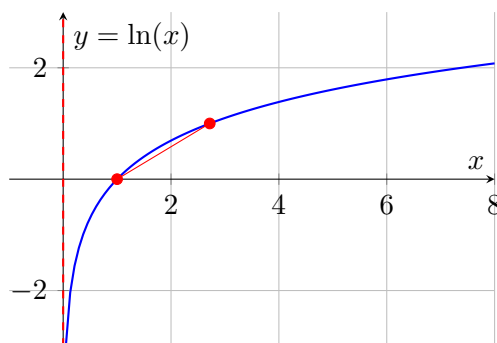
- **Définition** : Fonction qui à x associe l'exponentielle de x (base $e \approx 2.718$).
- **Domaine** : $\mathbb{R}$ **Image** : $]0, +\infty[$
- **Dérivée** : $(e^x)' = e^x$
- **Asymptotes** : Horizontale en $y = 0$ (en $-\infty$).
- **Points remarquables** :
 - Intersections axes : $(0, 1)$. Ne s'annule jamais.



G.2 2. Logarithme népérien ($\ln$)

- **Définition** : Fonction réciproque de la fonction exponentielle e^x .
- **Domaine** : $]0, +\infty[$ **Image** : $\mathbb{R}$
- **Dérivée** : $\ln'(x) = \frac{1}{x}$
- **Asymptotes** : Verticale en $x = 0$.
- **Points remarquables** :
 - Intersections axes : $(1, 0)$.
 - Valeur en e : $(e, 1)$.
- **Formule de changement de base** : Il est possible d'exprimer le logarithme népérien $\ln(x)$ (qui est le logarithme en base e) à l'aide de logarithmes dans d'autres bases, comme le logarithme décimal (base 10) :

$$\ln(x) = \frac{\log_{10}(x)}{\log_{10}(e)}$$



G.3 3. Exponentielle de base a (a^x avec $a > 0, a \neq 1$)

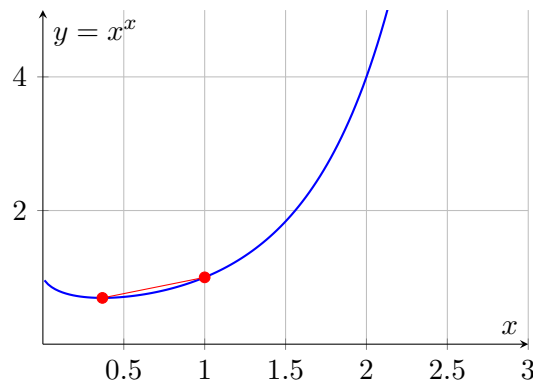
- **Définition** : $a^x = e^{x \ln(a)}$
- **Domaine** : $\mathbb{R}$ **Image** : $]0, +\infty[$
- **Dérivée** : $(a^x)' = a^x \ln(a)$
- **Asymptotes** : Horizontale en $y = 0$ (en $-\infty$ si $a > 1$, en $+\infty$ si $0 < a < 1$).
- **Points remarquables** :
 - Intersections axes : $(0, 1)$.

G.4 4. Logarithme de base a ($\log_a(x)$ avec $a > 0, a \neq 1$)

- **Définition** : $\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$
- **Domaine** : $]0, +\infty[$ **Image** : $\mathbb{R}$
- **Dérivée** : $\log'_a(x) = \frac{1}{x \ln(a)}$
- **Asymptotes** : Verticale en $x = 0$.
- **Points remarquables** :
 - Intersections axes : $(1, 0)$.

G.5 5. Fonction x^x

- **Définition** : $x^x = e^{x \ln(x)}$
- **Domaine** : $]0, +\infty[$ **Image** : $[e^{-1/e}, +\infty[$
- **Dérivée** : $(x^x)' = x^x (\ln(x) + 1)$
- **Limites remarquables** : $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = 1$.
- **Points remarquables** :
 - Extremum : Minimum global en $x = \frac{1}{e} \approx 0.368$, où $y = e^{-1/e} \approx 0.692$.
 - Passe par le point $(1, 1)$.



H Tableau Récapitulatif des Dérivées

Fonction $f(x)$	Dérivée $f'(x)$	Fonction $f(x)$	Dérivée $f'(x)$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$\arccos(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\tan(x)$	$1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$	$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\cot(x)$	$-(1 + \cot^2(x)) = -\frac{1}{\sin^2(x)}$	e^x	e^x
$\sec(x)$	$\sec(x) \tan(x)$	a^x	$a^x \ln(a)$
$\csc(x)$	$-\csc(x) \cot(x)$	x^x	$x^x (\ln(x) + 1)$
$\sinh(x)$	$\cosh(x)$	$\operatorname{arsinh}(x)$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$\cosh(x)$	$\sinh(x)$	$\operatorname{arcosh}(x)$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$\tanh(x)$	$1 - \tanh^2(x) = \frac{1}{\cosh^2(x)}$	$\operatorname{artanh}(x)$	$\frac{1}{1-x^2}$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$	$\log_a(x)$	$\frac{1}{x \ln(a)}$

TABLE 2 – Dérivées des fonctions trigonométriques, hyperboliques, exponentielles, logarithmiques et de leurs réciproques.