

Synthèse Ultime

LEPL1203 — Physique III : Ondes et Physique Quantique

UCLouvain — École Polytechnique de Louvain (EPL) — Quadrimestre 3

O. De Baerdemaker

Orientée résolution de problèmes

Avant-propos

Salut à toi, vaillant(e) étudiant(e) en plein blocus de **LEPL1203 — Physique III** !

Si tu as ce document entre les mains (probablement tard le soir avec une grande tasse de café et une pile d'annales à côté), voici l'esprit du projet : la physique ondulatoire et la mécanique quantique forment sans doute l'un des blocs les plus fascinants, mais aussi les plus déroutants du cursus d'ingénieur civil. On y passe sans transition de la vibration d'une corde de guitare aux équations de Maxwell, puis à l'effondrement probabiliste du paquet d'ondes et à l'effet tunnel d'un microscope STM.

En tant que profil **résolument visuel**, j'ai un besoin viscéral de voir, de schématiser et de classer pour comprendre. Il est hors de question de subir des dérivations formelles de quatre pages qui masquent l'intuition géométrique et physique, ou de bloquer le jour de l'examen faute de savoir quelle formule dégainer.

Cette « **Synthèse Ultime** » a donc été conçue comme une **boîte à outils opérationnelle de terrain** :

- **Une charte graphique couleur stricte** : Définitions en bleu, Lois et théorèmes en vert, **Procédures de résolution pas-à-pas en orange 3D**, **Pièges d'examen en rouge vif**, et raccourcis en cyan.
- **Des arbres de décision TikZ** à chaque carrefour méthodologique : dès la lecture de l'énoncé, tu sais exactement quelle route emprunter sans hésiter.
- **Des exemples réels intégralement résolus** tirés directement des sessions d'examen récentes de l'EPL (dont l'épreuve de Janvier 2025).
- **Une double approche visuelle** combinant schémas vectoriels TikZ et extractions haute fidélité des transparents officiels du cours.
- **Un chapitre final de réflexes d'examen** regroupant les *Red Flags* absolus et les vérifications de bon sens en dix secondes.

Prends ce guide, annote-le, surligne-le, et fais-en ton allié le plus précieux. Dompte les ondes et la quantique : **déchire tout à ton examen** !

O. De Baerdemaker

Table des matières

Avant-propos	2
1 Oscillateurs Harmoniques, Amortis & Forcés	5
1.1 Rappels théoriques	5
1.2 Procédures de résolution	6
1.2.1 Arbre décisionnel : quel régime d'oscillation identifier ?	6
1.2.2 Procédure type pas-à-pas	7
2 Ondes Mécaniques 1D, Acoustique & Effet Doppler	8
2.1 Rappels théoriques	8
2.2 Procédures de résolution	10
2.2.1 Arbre décisionnel : Acoustique, Décibels ou Doppler ?	10
2.2.2 Procédure type pas-à-pas : Doppler et Battements	11
3 Réflexion, Ondes Stationnaires, Résonateurs & Guides d'Ondes	13
3.1 Rappels théoriques	13
3.2 Procédures de résolution	16
3.2.1 Arbre décisionnel : réflexion, modes stationnaires & résonateurs	16
4 Électromagnétisme, Équations de Maxwell & Ondes EM	18
4.1 Rappels théoriques	18
4.2 Procédures de résolution	20
4.2.1 Arbre décisionnel : Électromagnétisme, Potentiel ou Onde EM ?	20
4.2.2 Procédure type : Détermination du champ magnétique induit dans un condensateur	21
5 Polarisation de la Lumière & Lois de Fresnel	22
5.1 Rappels théoriques	22
5.2 Procédures de résolution	24
5.2.1 Arbre décisionnel : identification de l'état de polarisation	24
6 Interférences Lumineuses, Couches Minces & Interférométrie	26
6.1 Rappels théoriques	26
6.2 Procédures de résolution	28
6.2.1 Arbre décisionnel : quel système d'interférences identifier ?	29
7 Diffraction de Fraunhofer & Réseaux	31
7.1 Rappels théoriques	31
7.2 Exemple résolu réel : Examen Janvier 2025 (Question 1 Ondes)	32
8 Rayonnement Électromagnétique, Antennes & Canaux de Propagation	35
8.1 Rappels théoriques	35
8.2 Procédures de résolution	37
8.2.1 Arbre décisionnel : quel modèle de canal radio choisir ?	37
8.2.2 Procédure type : Bilan de liaison radio et dimensionnement de portée	37
9 Crise de la Physique Classique & Dualité Onde-Corpuscule	39
9.1 Rappels théoriques	39
9.2 Procédures de résolution	40
10 Paquets d'Ondes, Heisenberg & Fonction d'Onde	41
10.1 Rappels théoriques	41
10.2 Procédures de résolution	42

11 Équation de Schrödinger & Puits de Potentiel 1D	43
11.1 Rappels théoriques	43
11.2 Exemple résolu réel : Probabilité de présence dans le puits infini	44
12 Effet Tunnel & Barrières de Potentiel	46
12.1 Rappels théoriques	46
12.2 Procédures de résolution	47
13 Modèle Quantique de l'Atome & Introduction aux Solides	48
13.1 Rappels théoriques	48
13.2 Procédures de résolution	49
14 Méthodes transversales & Réflexes d'examen	51
14.1 Les 10 <i>Red Flags</i> absolus d'examen	51
14.2 Grand Arbre Décisionnel Transversal	53
14.3 Vérifications de bon sens (<i>Sanity Checks</i>) en 10 secondes	54
14.4 Tableau comparatif unifié : Ondes Classiques vs Ondes Quantiques	54

1 Oscillateurs Harmoniques, Amortis & Forcés

L'oscillateur harmonique constitue la pierre angulaire de toute la physique ondulatoire et quantique. Qu'il s'agisse de la vibration d'une molécule diatomique, d'une onde sur une corde, d'un circuit RLC résonant ou de photons dans une cavité, tout système physique stable écarté de sa position d'équilibre se comporte, au premier ordre, comme un oscillateur harmonique. Maîtriser ses régimes libre, amorti et forcé est indispensable pour aborder avec sérénité les ondes mécaniques et électromagnétiques.

1.1 Rappels théoriques

Définition – Oscillateur harmonique simple non amorti

Un oscillateur harmonique simple à une dimension est régi par l'équation différentielle linéaire du second ordre sans second membre :

$$\boxed{\ddot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0} \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (1)$$

- ω_0 est la **pulsation propre** du système en $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$.
- La fréquence propre est $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$ en Hz et la période propre $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ en s.
- Solution générale temporelle : $x(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi)$, où A (amplitude) et ϕ (phase initiale) sont fixés par les conditions initiales $x(0)$ et $\dot{x}(0)$.
- Énergie mécanique totale conservée : $\boxed{E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 = \text{cste}}$.

Théorème – Oscillateur amorti par frottement visqueux

En présence d'une force de frottement fluide de type visqueux $\mathbf{F}_f = -b\dot{\mathbf{x}}\mathbf{u}_x$ ($b > 0$), l'équation du mouvement devient :

$$\boxed{\ddot{x}(t) + 2\gamma\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0} \quad \text{avec} \quad \gamma = \frac{b}{2m} \quad (2)$$

L'équation caractéristique $r^2 + 2\gamma r + \omega_0^2 = 0$ de discriminant réduit $\Delta' = \gamma^2 - \omega_0^2$ conduit à trois régimes physiques distincts :

I. Régime pseudopériodique ($\gamma < \omega_0 \iff \Delta' < 0$) : Amortissement sous-critique.

$$x(t) = A_0 e^{-\gamma t} \cos(\omega t + \phi) \quad \text{avec la pseudopulsation} \quad \boxed{\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} < \omega_0}$$

La pseudopériode est $T = \frac{2\pi}{\omega} > T_0$.

II. Régime critique ($\gamma = \omega_0 \iff \Delta' = 0$) : Retour à l'équilibre le plus rapide sans oscillation :

$$x(t) = (A + Bt)e^{-\gamma t}$$

III. Régime apériodique ($\gamma > \omega_0 \iff \Delta' > 0$) : Amortissement surcritique, somme de deux exponentielles décroissantes sans aucune oscillation.

Propriété – Décrément logarithmique & Facteur de qualité Q

Dans le régime pseudopériodique, l'atténuation d'amplitude entre deux maxima consécutifs séparés d'une pseudopériode T est quantifiée par le **décrément logarithmique** δ :

$$\delta = \ln \left(\frac{x(t)}{x(t+T)} \right) = \gamma T = \frac{2\pi\gamma}{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}} \quad (3)$$

Le **facteur de qualité** Q quantifie le confinement énergétique de l'oscillateur :

$$Q = \frac{\omega_0}{2\gamma} = \frac{\omega_0 m}{b} = 2\pi \frac{E_m}{|\Delta E_m|_{1 \text{ période}}} \approx \frac{\pi}{\delta} \quad (\text{si } \gamma \ll \omega_0) \quad (4)$$

Théorème – Oscillateur forcé sinusoïdal & Résonance

Soumis à une excitation extérieure $F(t) = F_0 \cos(\omega t)$, le mouvement permanent est sinusoïdal de même pulsation ω que l'excitateur : $x_p(t) = X_0(\omega) \cos(\omega t + \phi(\omega))$. En notation complexe :

$$\underline{X}(\omega) = \frac{F_0/m}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\gamma\omega} \Rightarrow X_0(\omega) = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}} \quad (5)$$

— **Résonance en amplitude (élongation)** : existe si et seulement si $\gamma < \frac{\omega_0}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow$

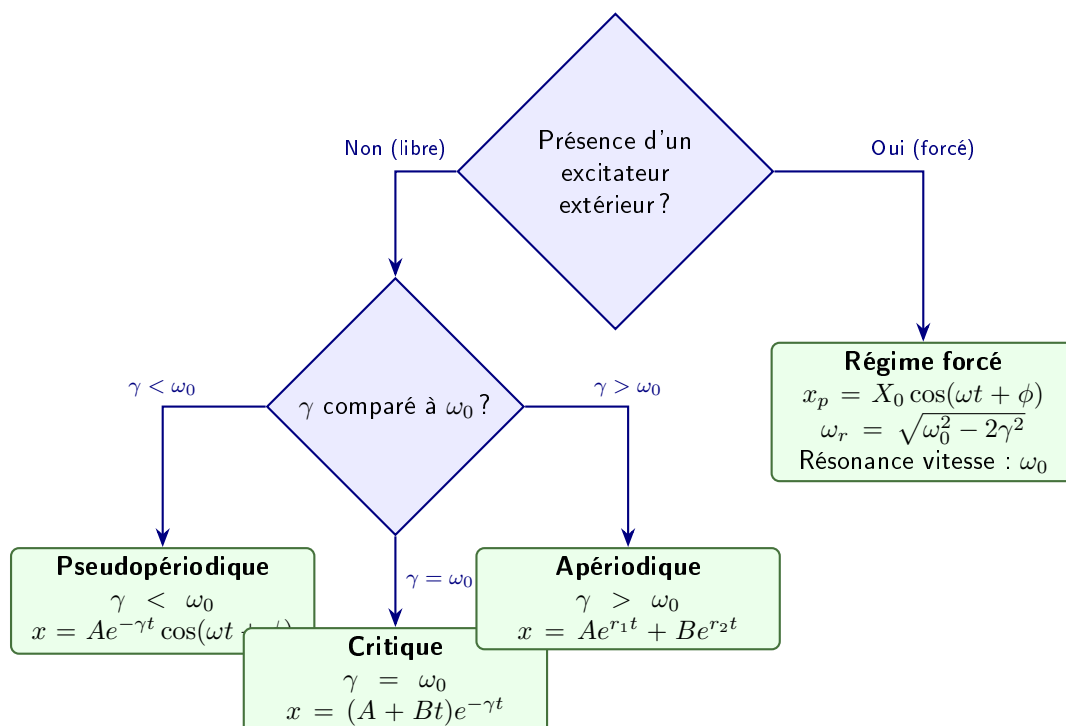
$$Q > \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,707. \text{ La pulsation de résonance d'amplitude est } \omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2} < \omega_0.$$

— **Résonance en vitesse (et en puissance/énergie absorbée)** : a lieu **strictement à la pulsation propre** $\omega = \omega_0$, quel que soit le niveau d'amortissement γ . À cette pulsation, vitesse et force sont en phase ($\phi_v = 0$).

— La **bande passante** à -3 dB (mi-hauteur de puissance) est $\Delta\omega = 2\gamma = \frac{\omega_0}{Q}$.

1.2 Procédures de résolution

1.2.1 Arbre décisionnel : quel régime d'oscillation identifier ?



1.2.2 Procédure type pas-à-pas

Procédure : Caractérisation complète d'un oscillateur libre ou forcé

Donnée : Masse m , constante de rappel k , coefficient de frottement b , force $F(t) = F_0 \cos(\omega t)$.

Étape 1 Mise sous forme standard : Diviser par m pour identifier $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ et $\gamma = b/(2m)$.

Étape 2 Calcul du discriminant : Évaluer $\Delta' = \gamma^2 - \omega_0^2$ pour classer le régime (pseudopériodique, critique, apériodique).

Étape 3 Calcul de l'amortissement : Si oscillations mesurées, extraire le décrement $\delta = \frac{1}{n} \ln(x_0/x_n)$, puis $\gamma = \delta/T$ et $Q = \pi/\delta$.

Étape 4 Régime forcé permanent : Calculer l'amplitude complexe $\underline{X}(\omega)$. Vérifier si la résonance d'amplitude existe ($Q > 1/\sqrt{2}$). Si oui, calculer $\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}$ et $X_{0,\max} \approx Q \frac{F_0}{k}$.

Attention – Ne confondez pas résonance d'amplitude et résonance de vitesse !

- La résonance de **vitesse** (absorption maximale de puissance) se produit **toujours** à $\omega = \omega_0$, indépendamment de l'amortissement.
- La résonance d'**amplitude** (élongation maximale) se produit à une pulsation **inférieure** $\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}$, et disparaît totalement dès que $Q \leq 1/\sqrt{2}$.

Astuce – Calcul express du facteur de qualité à partir du décrement

Pour un amortissement modéré ($Q \geq 5$), on utilise immédiatement :

$$Q \approx \frac{\pi}{\delta} = \frac{\pi}{\ln(x_n/x_{n+1})}$$

Si l'amplitude est divisée par 2 après N oscillations complètes : $e^{-N\delta} = 1/2 \implies \delta = \frac{\ln 2}{N} \implies Q \approx \frac{N\pi}{\ln 2} \approx 4,53 N$.

Exemple – Caractérisation d'un oscillateur amorti d'examen

Un système masse-ressort ($m = 0,25$ kg) oscille avec une pseudopériode $T = 0,40$ s. On observe que son amplitude est divisée par 4 au bout de 5 oscillations complètes.

Résolution pas-à-pas :

1. **Décrement logarithmique :** $e^{-5\delta} = \frac{1}{4} \implies 5\delta = \ln 4 = 2 \ln 2 \approx 1,386 \implies \boxed{\delta = 0,277}$.
2. **Taux d'amortissement :** $\gamma = \frac{\delta}{T} = \frac{0,277}{0,40} = \boxed{0,693 \text{ s}^{-1}}$. Coefficient de frottement : $b = 2m\gamma = 2 \times 0,25 \times 0,693 = \boxed{0,346 \text{ N} \cdot \text{s/m}}$.
3. **Pulsation propre :** $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0,40} = 15,71 \text{ rad/s}$. Ainsi, $\omega_0 = \sqrt{\omega^2 + \gamma^2} = \sqrt{15,71^2 + 0,693^2} = \boxed{15,72 \text{ rad/s}}$.
4. **Constante de raideur :** $k = m\omega_0^2 = 0,25 \times (15,72)^2 = \boxed{61,8 \text{ N/m}}$.
5. **Facteur de qualité :** $Q = \frac{\omega_0}{2\gamma} = \frac{15,72}{2 \times 0,693} \approx \boxed{11,3} > \frac{1}{\sqrt{2}}$ (résonance très nette).

2 Ondes Mécaniques 1D, Acoustique & Effet Doppler

Une onde est la propagation d'une perturbation transportant de l'énergie et de la quantité de mouvement sans transport net de matière. Qu'il s'agisse des oscillations transversales d'une corde vibrante, des ondes longitudinales de pression acoustique dans un fluide ou de la propagation d'un tsunami, les concepts unificateurs sont **l'impédance caractéristique**, la **puissance transportée**, **l'atténuation géométrique** et la modification fréquentielle par mouvement relatif : **l'Effet Doppler**.

2.1 Rappels théoriques

Théorème – Équation d'onde de d'Alembert sur une corde vibrante

Considérons une corde idéale de masse linéique μ ($\text{kg} \cdot \text{m}^{-1}$) soumise à une tension longitudinale uniforme T_0 (N). Pour des déplacements transversaux de faible amplitude ($\partial y / \partial x \ll 1$), la deuxième loi de Newton appliquée à un tronçon infinitésimal dx conduit à **l'équation de d'Alembert 1D** :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad \text{avec la vitesse de phase} \quad v = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}} \quad (6)$$

- Solution générale de d'Alembert : $y(x, t) = f(x - vt) + g(x + vt)$, superposition d'une onde progressive se propageant vers les x croissants à vitesse v et d'une onde régressive vers les x décroissants.
- Onde progressive harmonique : $y(x, t) = A \cos(kx - \omega t + \phi)$, où $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{v}$ est le **nombre d'onde** en $\text{rad} \cdot \text{m}^{-1}$.
- Vitesse de propagation d'un tsunami (eau peu profonde de profondeur h) : $v = \sqrt{gh}$.

Définition – Impédance caractéristique mécanique

L'**impédance caractéristique** Z d'une corde vibrante relie la force transversale dynamique exercée par la corde à la vitesse transversale des particules du milieu :

$$F_{\text{transversale}}(x, t) = -T_0 \frac{\partial y}{\partial x} \Rightarrow Z = \frac{F_{\text{transversale}}}{v_y} = \sqrt{\mu T_0} = \mu v = \frac{T_0}{v} \quad [\text{kg} \cdot \text{s}^{-1} \text{ ou } \text{N} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-1}] \quad (7)$$

Propriété – Acoustique des fluides : Relations Déplacement, Pression & Intensité

Pour une onde sonore se propageant selon x dans un fluide de masse volumique au repos ρ_0 et de module d'incompressibilité adiabatique B (Pa) :

- Célérité du son : $v = \sqrt{\frac{B}{\rho_0}} = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}$ (dans l'air à 20°C : $v \approx 343$ m/s).
- Impédance acoustique caractéristique : $Z_{\text{ac}} = \rho_0 v$ [$\text{Pa} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-1}$ ou Rayl] (≈ 415 Rayl dans l'air, $\approx 1,5 \cdot 10^6$ Rayl dans l'eau).
- Déplacement longitudinal des molécules : $s(x, t) = s_{\text{max}} \cos(kx - \omega t)$.
- **Surpression acoustique** : $\Delta p(x, t) = -B \frac{\partial s}{\partial x} = B k s_{\text{max}} \sin(kx - \omega t) = \Delta p_{\text{max}} \sin(kx - \omega t)$.
- Remarquez le **déphasage de $\pi/2$** : la surpression est maximale là où le déplacement s'annule (nœud de déplacement = ventre de pression).
- Amplitude de surpression maximale :

$$\Delta p_{\text{max}} = B k s_{\text{max}} = \rho_0 v \omega s_{\text{max}} = Z_{\text{ac}} \omega s_{\text{max}} \quad (8)$$

- **Intensité acoustique moyenne** (puissance acoustique par unité de surface en $\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$) :

$$I = \langle \Delta p(x, t) \cdot v_{\text{particule}}(x, t) \rangle = \frac{1}{2} \rho_0 v \omega^2 s_{\text{max}}^2 = \frac{\Delta p_{\text{max}}^2}{2 \rho_0 v} = \frac{\Delta p_{\text{max}}^2}{2 Z_{\text{ac}}} \quad (9)$$

Définition – Niveau d'intensité acoustique en décibels (dB) & Ondes Sphériques

- Le **niveau sonore en décibels** mesure la sensation auditive logarithmique :

$$\beta = 10 \log_{10} \left(\frac{I}{I_0} \right) \quad [\text{dB}] \quad \text{avec le seuil d'audibilité} \quad I_0 = 10^{-12} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \quad (10)$$

- Seuil de douleur de l'oreille humaine : $I = 1 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \iff \beta = 120 \text{ dB}$ (domaine audible : 20 Hz – 20 kHz).
- **Somme de sources incohérentes** : Les intensités physiques s'additionnent, jamais les décibels :

$$I_{\text{tot}} = \sum_{k=1}^N I_k \implies \beta_{\text{tot}} = 10 \log_{10} \left(\sum_{k=1}^N 10^{\beta_k/10} \right) \quad (11)$$

- **Atténuation géométrique en ondes sphériques 3D isotropes** (source émettant une puissance P) :

$$I(r) = \frac{P_{\text{source}}}{4\pi r^2} \implies \Delta p_{\text{max}}(r) \propto \frac{1}{r} \quad (12)$$

- **Loi de décroissance de niveau avec la distance** :

$$\beta(r_2) - \beta(r_1) = 10 \log_{10} \left(\frac{I(r_2)}{I(r_1)} \right) = 20 \log_{10} \left(\frac{r_1}{r_2} \right) \quad (13)$$

Doubler la distance ($r_2 = 2r_1$) diminue le niveau sonore d'exactly $20 \log_{10}(2) \approx 6 \text{ dB}$.

Théorème – Effet Doppler universel (Acoustique, Optique & Radar)

L'effet Doppler traduit le décalage fréquentiel produit par le déplacement relatif d'une source et d'un observateur.

- a) **Effet Doppler acoustique (milieu matériel au repos avec célérité v)** : Soient v_S la vitesse de la source et v_R la vitesse du récepteur le long de la ligne les joignant :

$$f_R = f_S \left(\frac{v \pm v_R}{v \mp v_S} \right) \quad (14)$$

Règle universelle des signes :

- *Rapprochement* $\implies f_R > f_S$: utiliser le signe + au numérateur (si récepteur s'approche) et le signe – au dénominateur (si source s'approche).
- *Éloignement* $\implies f_R < f_S$: utiliser le signe – au numérateur (si récepteur s'éloigne) et le signe + au dénominateur (si source s'éloigne).

- b) **Double Doppler / Radar sur obstacle mobile réfléchissant (vitesse u)** : La cible en mouvement se comporte d'abord comme un récepteur mobile, puis réémet comme une source mobile :

$$f'' = f \left(\frac{v + u}{v - u} \right) \approx f \left(1 + \frac{2u}{v} \right) \quad (u \ll v) \quad (15)$$

La fréquence de **battement Doppler** mesurée au récepteur vaut : $f_{\text{bat}} = |f'' - f| \approx \frac{2u}{v} f$.

- c) **Effet Doppler optique relativiste (ondes lumineuses dans le vide) :** Sans milieu matériel de propagation, seul compte le mouvement relatif v_{rel} :

$$f_R = f_S \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \quad \text{avec} \quad \beta = \frac{v_{\text{rel}}}{c} \quad (\text{source et récepteur s'éloignant}) \quad (16)$$

Pour $v \ll c$, le décalage spectral (*redshift* astronomique z) s'écrit directement :

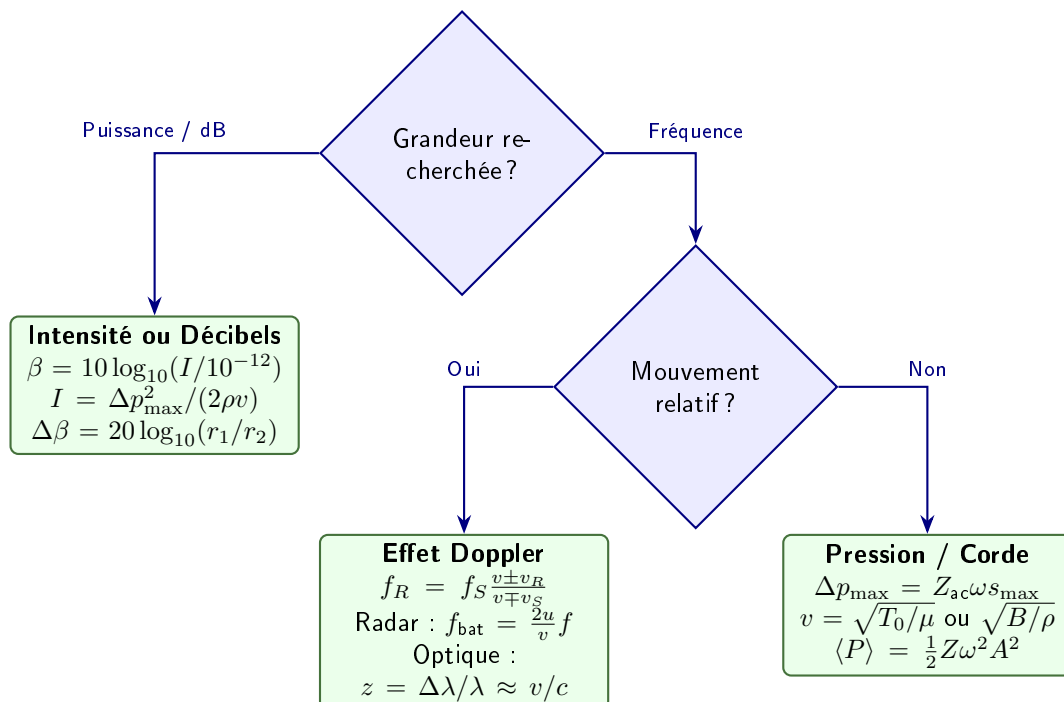
$$z = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \frac{\lambda_{\text{obs}} - \lambda_0}{\lambda_0} \approx \frac{v_{\text{rel}}}{c} \quad (17)$$

Propriété – Énergie, puissance et propagation d'impulsions sur corde

- Densité d'énergie moyenne : $\langle u \rangle = \frac{1}{2} \mu \omega^2 A^2$.
- Puissance moyenne transportée : $\langle P \rangle = \frac{1}{2} Z \omega^2 A^2 = \frac{1}{2} Z v_{y,\text{max}}^2 = v \langle u \rangle$.
- **Méthode graphique de d'Alembert pour impulsions (pulses) :** Pour un pulse incident $f(x - vt)$ arrivant sur une frontière en $x = 0$:
 - **Extrémité fixe** ($y(0, t) = 0$) : $r = -1$. L'onde virtuelle réfléchie est **inversée verticalement** : $g(x + vt) = -f(-x - vt)$.
 - **Extrémité libre** ($\partial y / \partial x(0, t) = 0$) : $r = +1$. L'onde virtuelle réfléchie est **droite** (même signe) : $g(x + vt) = +f(-x - vt)$.
 - Le profil total observé est la somme spatiale algébrique directe : $y(x, t) = f(x - vt) + g(x + vt)$.

2.2 Procédures de résolution

2.2.1 Arbre décisionnel : Acoustique, Décibels ou Doppler ?



2.2.2 Procédure type pas-à-pas : Doppler et Battements

Procédure : Calcul du décalage Doppler et battements entre deux mobiles

Donnée : Deux mobiles A et B de vitesses v_A et v_B émettant à fréquence f_0 dans un milieu où le son va à v .

Étape 1 Identification des rôles : Définir clairement qui est la source (S) et qui est le récepteur (R).

Étape 2 Signes du numérateur et dénominateur : Si R s'approche de $S \Rightarrow (v + v_R)$ au numérateur. Si S s'approche de $R \Rightarrow (v - v_S)$ au dénominateur.

Étape 3 Calcul de la fréquence perçue : $f_R = f_0 \frac{v \pm v_R}{v \mp v_S}$.

Étape 4 Fréquence de battement : Si l'auditeur entend simultanément une onde à f_0 et une onde à f_R , la fréquence de battement perçue est :

$$f_{\text{bat}} = |f_R - f_0| \quad (18)$$

Attention – Ne confondez pas vitesse de propagation et vitesse transversale !

- La **vitesse de l'onde** $v = \sqrt{T_0/\mu}$ est la célérité à laquelle le profil géométrique avance le long de l'axe x . C'est une constante du milieu.
- La **vitesse transversale** $v_y(x, t) = \frac{\partial y}{\partial t} = \omega A \sin(kx - \omega t)$ est la vitesse physique des morceaux de matière oscillant sur place selon y . Sa valeur maximale est $v_{y,\text{max}} = \omega A$.

Attention – Ne jamais additionner les décibels directement !

Si deux sources émettent chacune 90 dB en un même point :

$$\beta_{\text{tot}} \neq 90 + 90 = 180 \text{ dB} !$$

On additionne les intensités : $I_{\text{tot}} = I_1 + I_2 = 2I_1 \Rightarrow \beta_{\text{tot}} = \beta_1 + 10 \log_{10}(2) = 90 + 3,01 = \mathbf{93 \text{ dB}}$.

Astuce – Raccourcis express en acoustique et puissance

- Doubler la puissance ou le nombre de sources identiques $\Rightarrow +\mathbf{3 \text{ dB}}$.
- Multiplier la puissance par 10 $\Rightarrow +\mathbf{10 \text{ dB}}$.
- Doubler la distance à une source ponctuelle sphérique 3D $\Rightarrow -\mathbf{6 \text{ dB}}$.
- Multiplier la distance par 10 $\Rightarrow -\mathbf{20 \text{ dB}}$.
- Puissance en fonction de la vitesse transversale max : $\langle P \rangle = \frac{1}{2} Z v_{y,\text{max}}^2$.

Exemple – Application d'examen : Duo Soprano et Basse (Y&F Ex. 16.59)

Une soprano chante un *do* aigu ($f_1 = 1046,5 \text{ Hz}$) et une basse chante un *do* grave ($f_2 = 130,8 \text{ Hz}$, trois octaves plus bas). Tous deux chantent avec le même niveau d'intensité de 70 dB dans l'air ($\rho_0 = 1,20 \text{ kg/m}^3$, $v = 343 \text{ m/s}$).

Raisonnement et Calculs :

1. **Intensité acoustique physique :**

$$\beta = 70 \text{ dB} \Rightarrow I = I_0 \cdot 10^{\beta/10} = 10^{-12} \cdot 10^7 = \mathbf{10^{-5} \text{ W/m}^2}$$

2. **Amplitude de surpression Δp_{max} :** Comme $I = \frac{\Delta p_{\text{max}}^2}{2\rho_0 v}$, l'amplitude de pression ne dépend que de l'intensité et de l'impédance du milieu ($Z_{\text{ac}} = 1,20 \times 343 = 411,6 \text{ Rayl}$), et est donc **rigoureusement identique** pour les deux chanteurs :

$$\Delta p_{\text{max}} = \sqrt{2\rho_0 v I} = \sqrt{2 \times 411,6 \times 10^{-5}} = \sqrt{8,232 \cdot 10^{-3}} \approx \mathbf{9,07 \cdot 10^{-2} \text{ Pa}}$$

3. **Amplitude de déplacement moléculaire** $s_{\max}$: Comme $\Delta p_{\max} = \rho_0 v \omega s_{\max} \implies s_{\max} = \frac{\Delta p_{\max}}{\rho_0 v (2\pi f)} \propto \frac{1}{f}$:

$$\text{Pour la soprano : } s_{\max,1} = \frac{9,07 \cdot 10^{-2}}{411,6 \times (2\pi \times 1046,5)} \approx \mathbf{3,35 \cdot 10^{-8} \text{ m}} = \mathbf{33,5 \text{ nm}}$$

$$\text{Pour la basse : } s_{\max,2} = \frac{9,07 \cdot 10^{-2}}{411,6 \times (2\pi \times 130,8)} \approx \mathbf{2,68 \cdot 10^{-7} \text{ m}} = \mathbf{268 \text{ nm}} = 8 \times s_{\max,1}$$

Conclusion d'examen : Pour produire la même sensation auditive (70 dB), les molécules d'air doivent effectuer des excursions spatiales 8 fois plus grandes dans le grave que dans l'aigu !

3 Réflexion, Ondes Stationnaires, Résonateurs & Guides d'Ondes

Lorsqu'une onde rencontre une discontinuité de milieu (jonction de cordes, changement d'indice optique, paroi conductrice ou saut de potentiel), la superposition de l'onde incidente et de l'onde réfléchie engendre des **ondes stationnaires**. Ce phénomène régit la résonance des instruments de musique (cordes, tuyaux sonores), le filtrage optique de haute précision (**cavités Fabry-Pérot**), le confinement d'énergie micro-onde (**cavités 3D**) et la transmission guidée haute fréquence (**guides d'ondes à plaques conductrices**).

3.1 Rappels théoriques

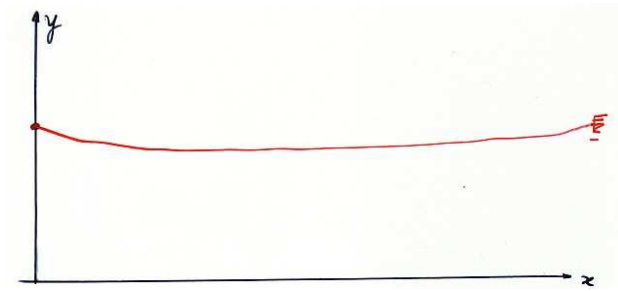


FIGURE 1 – Réflexion et transmission à l'interface de deux cordes.

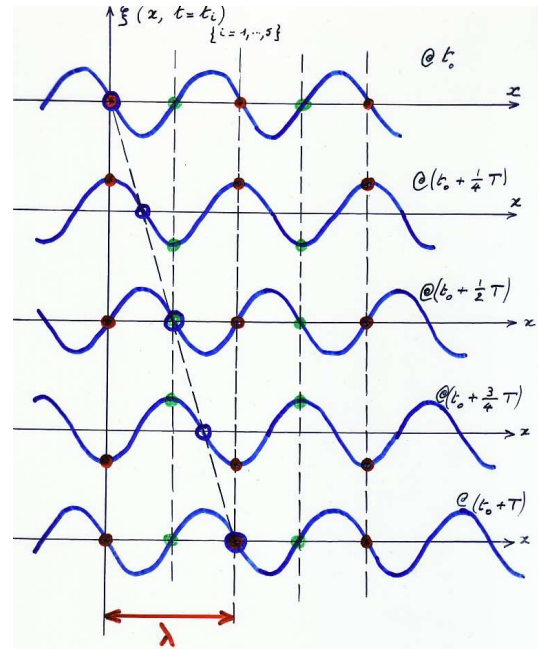


FIGURE 2 – Onde stationnaire : nœuds et ventres.

Théorème – Coefficients de réflexion et de transmission à une jonction

Soient deux cordes semi-infinies raccordées en $x = 0$, sous même tension T_0 , d'impédances $Z_1 = \mu_1 v_1$ ($x < 0$) et $Z_2 = \mu_2 v_2$ ($x > 0$). Une onde incidente $y_i(x, t) = A_i \cos(k_1 x - \omega t)$ engendre une onde réfléchie $y_r(x, t) = A_r \cos(-k_1 x - \omega t)$ et une onde transmise $y_t(x, t) = A_t \cos(k_2 x - \omega t)$. Les conditions aux limites en $x = 0$ imposent :

- Continuité de l'élongation : $y_1(0, t) = y_2(0, t) \implies A_i + A_r = A_t$.
- Continuité de la force transversale : $-T_0 \frac{\partial y_1}{\partial x} \Big|_0 = -T_0 \frac{\partial y_2}{\partial x} \Big|_0 \implies Z_1(A_i - A_r) = Z_2 A_t$.

On en déduit les **coefficients d'amplitude** de réflexion r et de transmission t :

$$r = \frac{A_r}{A_i} = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{v_2 - v_1}{v_2 + v_1} \quad \text{et} \quad t = \frac{A_t}{A_i} = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2} = \frac{2v_2}{v_2 + v_1} \quad (19)$$

Remarquons la relation géométrique : $1 + r = t$.

Théorème – Conservation de l'énergie : coefficients énergétiques R et T

Les coefficients de réflexion et transmission en puissance (pouvoirs réflecteur et transmetteur) s'écrivent :

$$R = \frac{\langle P_r \rangle}{\langle P_i \rangle} = r^2 = \left(\frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \right)^2 \quad \text{et} \quad T = \frac{\langle P_t \rangle}{\langle P_i \rangle} = \frac{Z_2}{Z_1} t^2 = \frac{4Z_1 Z_2}{(Z_1 + Z_2)^2} \quad (20)$$

La conservation de l'énergie est rigoureusement satisfaite :

$$R + T = 1 \quad (21)$$

- **Extrémité fixe** ($Z_2 \rightarrow \infty$) : $r = -1, t = 0 \Rightarrow R = 1, T = 0$. Déphasage de π à la réflexion (inversion du signal).
- **Extrémité libre** ($Z_2 = 0$) : $r = +1, t = 2 \Rightarrow R = 1, T = 0$. Réflexion sans inversion de phase.
- **Milieu adapté** ($Z_1 = Z_2$) : $r = 0, t = 1 \Rightarrow R = 0, T = 1$. Pas de réflexion (onde transmise intégrale).

Propriété – Ondes stationnaires & Modes propres sur cordes

Pour une corde de longueur L fixée à ses deux extrémités ($y(0, t) = y(L, t) = 0$) :

$$y(x, t) = 2A \sin(kx) \sin(\omega t) \Rightarrow \lambda_n = \frac{2L}{n} \quad \text{et} \quad f_n = n \frac{v}{2L} = n f_1, \quad n \in \{1, 2, 3, \dots\} \quad (22)$$

- Nœuds de vibration : $x_n = n \frac{\lambda}{2}$; Ventres de vibration : $x_v = \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda}{2}$.
- Distance nœud-nœud consécutifs : $\frac{\lambda}{2}$; Distance nœud-ventre adjacent : $\frac{\lambda}{4}$.

Théorème – Tuyaux sonores acoustiques : Ouverts vs Fermés (Y&F Ex. 16.26)

Considérons une colonne d'air de longueur L où le son se propage à la vitesse $v = \sqrt{\gamma RT/M}$:

- a) **Tuyau ouvert aux deux extrémités (ouvert-ouvert)** : Les deux extrémités ouvertes imposent des **nœuds de surpression** ($\Delta p = 0$) et des ventres de déplacement.

$$\lambda_n = \frac{2L}{n} \quad \text{et} \quad f_n = n \frac{v}{2L} = n f_1, \quad n \in \{1, 2, 3, \dots\} \quad (\text{toutes harmoniques}) \quad (23)$$

- b) **Tuyau fermé à une extrémité (ouvert-fermé)** : L'extrémité ouverte impose un nœud de pression (ventre de déplacement) et l'extrémité fermée impose un nœud de déplacement ($s = 0$), donc un **ventre de surpression**.

$$\lambda_m = \frac{4L}{2m-1} \quad \text{et} \quad f_m = (2m-1) \frac{v}{4L} = (2m-1) f_1, \quad m \in \{1, 2, 3, \dots\} \quad (24)$$

Règle cardinale d'examen : Un tuyau fermé à un bout ne produit **que des harmoniques impaires** ($f_1, 3f_1, 5f_1, 7f_1, \dots$). Les harmoniques paires sont physiquement interdites !

- c) **Effets de la température sur la résonance acoustique** : Comme $v(T) \propto \sqrt{T}$, une variation thermique ΔT induit un glissement de fréquence :

$$\frac{\Delta f}{f} = \frac{1}{2} \frac{\Delta T}{T} \quad (25)$$

Définition – Battements acoustiques (TP 5 Ex. 7)

La superposition de deux ondes sonores de pulsations très proches $\omega_1 \approx \omega_2$ et de même amplitude produit un signal modulé en amplitude :

$$s(t) = 2A \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right) \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right) \quad (26)$$

L'oreille percevant l'intensité sonore proportionnelle au carré de l'amplitude, elle entend deux maxima par période de modulation. La **fréquence de battement** vaut donc :

$$\boxed{f_{\text{bat}} = |f_1 - f_2|} \quad \text{autour de la fréquence porteuse moyenne} \quad \boxed{f_{\text{port}} = \frac{f_1 + f_2}{2}} \quad (27)$$

Théorème – Cavité résonnante électromagnétique 3D (Examen Janvier 2007)

Une cavité fermée cubique ou parall  l  pip  dique de dimensions $a \times b \times c$ délimitée par des parois parfaitement conductrices impose l'annulation du champ électrique tangentiel ($E_{\text{tan}} = 0$). Le vecteur d'onde est quantifié dans les trois directions de l'espace :

$$k_x = \frac{m\pi}{a}, \quad k_y = \frac{n\pi}{b}, \quad k_z = \frac{p\pi}{c}, \quad (m, n, p) \in \mathbb{N}^3 \quad (28)$$

Les fréquences de résonance des modes propres TE_{mnp} et TM_{mnp} s'écrivent :

$$\boxed{f_{mnp} = \frac{c}{2\sqrt{\epsilon_r \mu_r}} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 + \left(\frac{p}{c}\right)^2}} \quad (29)$$

Pour un cube de côté a dans le vide ($a = b = c$) : $f_{mnp} = \frac{c}{2a} \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}$. Le mode fondamental TE_{101} résonne à $f_{101} = \frac{c}{\sqrt{2}a}$.

Théorème – Cavité Fabry-Pérot & Filtrage spectral (Examen Juin 2008)

Une cavité optique Fabry-Pérot est constituée de deux miroirs parallèles de réflectance R séparés d'une distance L , remplis d'un milieu d'indice n .

— **Fréquences des pics de transmission** (résonance interférométrique $2nL = m\lambda$) :

$$\boxed{f_m = m \frac{c}{2nL}}, \quad m \in \mathbb{N}^* \quad (30)$$

— **Intervalle Spectral Libre (FSR)** (séparation fréquentielle et en longueur d'onde entre deux pics consécutifs) :

$$\boxed{\Delta f_{\text{FSR}} = \frac{c}{2nL}} \quad \text{et} \quad \boxed{\Delta \lambda_{\text{FSR}} \approx \frac{\lambda_0^2}{2nL}} \quad (31)$$

— **Finesse $\mathcal{F}$ et Largeur à mi-hauteur (FWHM δf)** :

$$\boxed{\mathcal{F} = \frac{\pi\sqrt{R}}{1-R} = \frac{\Delta f_{\text{FSR}}}{\delta f}} \implies \boxed{\delta f = \frac{c(1-R)}{2\pi nL\sqrt{R}}} \quad (32)$$

Théorème – Guides d'ondes à plaques parallèles conductrices (TP 5 Ex. 12)

Considérons deux plaques planes parfaitement conductrices situées en $y = 0$ et $y = a$, guidant une onde EM se propageant selon z .

— Conditions aux limites : $E_z(x, 0, z) = E_z(x, a, z) = 0 \implies k_y = \frac{m\pi}{a}, \quad m \in \{1, 2, 3, \dots\}$.

— **Relation de dispersion guidée** : $k_y^2 + k_z^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \Rightarrow k_z = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \left(\frac{f_{c,m}}{f}\right)^2}$.

— **Fréquence de coupure du mode m** :

$$f_{c,m} = \frac{mc}{2a} \quad \text{ou longueur d'onde de coupure} \quad \lambda_{c,m} = \frac{2a}{m} \quad (33)$$

— Si $f > f_{c,m}$: propagation guidée sans atténuation ($k_z \in \mathbb{R}$).

— Si $f < f_{c,m}$: **régime de coupure**, $k_z = -j\alpha$ est imaginaire pur. L'onde est **évanescence** et s'atténue en $e^{-\alpha z}$ sans transporter d'énergie.

— **Vitesse de phase v_ϕ et Vitesse de groupe v_g** :

$$v_\phi = \frac{\omega}{k_z} = \frac{c}{\sqrt{1 - (f_{c,m}/f)^2}} > c \quad \text{et} \quad v_g = \frac{d\omega}{dk_z} = c\sqrt{1 - (f_{c,m}/f)^2} < c \quad (34)$$

— Relation fondamentale universelle :

$$v_\phi \cdot v_g = c^2 \quad (35)$$

Propriété – Dispersion chromatique et vitesse de groupe dans la matière (Examen Juin 2002)

Dans un milieu matériel dispersif d'indice optique dépendant de la longueur d'onde $n(\lambda)$:

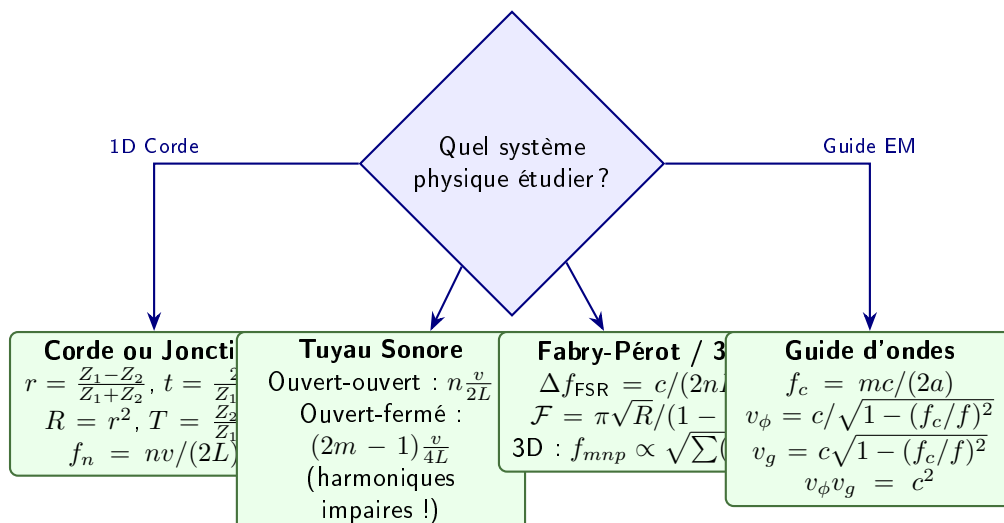
$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{c}{n - \lambda \frac{dn}{d\lambda}} \quad (36)$$

L'étalement temporel d'une impulsion polychromatique de largeur spectrale $\Delta\lambda$ sur une distance

$$L \text{ vaut : } \Delta t \approx L \left| \frac{d(1/v_g)}{d\lambda} \right| \Delta\lambda.$$

3.2 Procédures de résolution

3.2.1 Arbre décisionnel : réflexion, modes stationnaires & résonateurs



Attention – Ne confondez jamais tuyau ouvert-ouvert et tuyau ouvert-fermé !

À l'examen, si l'énoncé mentionne un tuyau fermé à une extrémité :

- La fréquence fondamentale est deux fois plus basse : $f_1 = \frac{v}{4L}$ (au lieu de $\frac{v}{2L}$).
- Il n'y a **jamais d'harmonique paire** : si l'on vous demande la fréquence de la troisième harmonique, c'est $3f_1$. Si l'on vous demande le deuxième mode au-dessus du fondamental, c'est $5f_1$ (et non $2f_1$ ou $3f_1$).

Attention – Le piège mortel sur le coefficient de transmission d'énergie T !

L'erreur la plus fréquente en examen consiste à écrire $T = t^2$. C'est **faux** !

$$T = \frac{Z_2}{Z_1} t^2 = \frac{\mu_2 v_2}{\mu_1 v_1} t^2$$

Le préfacteur Z_2/Z_1 découle du fait que la puissance transportée dépend de l'impédance du milieu porteur. Si l'on oubliait ce facteur, on trouverait $R + T \neq 1$, violant la conservation de l'énergie.

Astuce – Règle des vitesses de phase et de groupe dans un guide d'ondes

Retenez l'inégalité fondamentale et la moyenne géométrique :

$$v_g < c < v_\phi \quad \text{avec} \quad \sqrt{v_g \cdot v_\phi} = c$$

La vitesse de phase dépasse c sans violer la relativité car elle ne transporte aucune information. C'est la vitesse de groupe v_g , strictement inférieure à c , qui transporte l'énergie du signal.

Exemple – Application d'examen : Guide d'ondes à plaques parallèles (TP 5 Ex. 12)

Un guide d'ondes est formé de deux plaques conductrices séparées de $a = 3 \text{ cm} = 0,03 \text{ m}$. On y injecte une onde électromagnétique de fréquence $f = 12 \text{ GHz} = 12 \cdot 10^9 \text{ Hz}$.

Résolution pas-à-pas :

1. **Fréquence de coupure du mode fondamental ($m = 1$) :**

$$f_{c,1} = \frac{c}{2a} = \frac{3 \cdot 10^8}{2 \times 0,03} = \frac{3 \cdot 10^8}{0,06} = 5 \text{ GHz}$$

Pour $m = 2$: $f_{c,2} = 2 \times 5 = 10 \text{ GHz}$. Pour $m = 3$: $f_{c,3} = 15 \text{ GHz}$.

Comme $f = 12 \text{ GHz}$, seuls les modes $m = 1$ et $m = 2$ peuvent se propager ($f > f_c$). Le mode $m = 3$ est évanescent.

2. **Facteur de guidage pour le mode $m = 1$:**

$$\sqrt{1 - \left(\frac{f_{c,1}}{f}\right)^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{5}{12}\right)^2} = \sqrt{1 - 0,1736} = \sqrt{0,8264} \approx 0,909$$

3. **Vitesses de phase et de groupe :**

$$v_g = c \times 0,909 = 3 \cdot 10^8 \times 0,909 = 2,73 \cdot 10^8 \text{ m/s} \quad (< c)$$

$$v_\phi = \frac{c}{0,909} = \frac{3 \cdot 10^8}{0,909} = 3,30 \cdot 10^8 \text{ m/s} \quad (> c)$$

Vérification : $v_\phi v_g = (3,30 \cdot 10^8) \times (2,73 \cdot 10^8) \approx 9,0 \cdot 10^{16} = c^2$ (parfait).

4 Électromagnétisme, Équations de Maxwell & Ondes EM

Les équations de Maxwell réalisent la synthèse magistrale de l'électricité, du magnétisme et de l'optique. En introduisant le concept révolutionnaire de **courant de déplacement**, Maxwell a prédit que les variations temporelles des champs électrique et magnétique s'engendrent mutuellement pour propager une onde électromagnétique dans l'espace à la vitesse de la lumière c . Ce chapitre traite des opérateurs différentiels, de l'équation de Poisson, des lois de Maxwell complètes et de l'énergie des ondes électromagnétiques.

4.1 Rappels théoriques

Théorème – Opérateurs différentiels vectoriels & Théorèmes intégraux (APE 1)

Soient $V(x, y, z)$ un potentiel scalaire et $\mathbf{A}(x, y, z)$ un champ vectoriel différentiables :

- **Gradient** : $\nabla V = \frac{\partial V}{\partial x} \mathbf{u}_x + \frac{\partial V}{\partial y} \mathbf{u}_y + \frac{\partial V}{\partial z} \mathbf{u}_z$ (indique la direction de plus forte variation spatiale).
- **Divergence** : $\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$ (quantifie la présence locale de sources ou de puits).
- **Rotationnel** : $\operatorname{rot} \mathbf{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \mathbf{u}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \mathbf{u}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \mathbf{u}_z$ (mesure la vortécité/circulation locale).
- **Laplacien scalaire** : $\nabla^2 V = \operatorname{div}(\nabla V) = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$.
- **Théorème de Gauss-Ostrogradsky (flux-divergence)** :

$$\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V (\operatorname{div} \mathbf{A}) dV \quad (37)$$

- **Théorème de Stokes-Ampère (circulation-rotationnel)** :

$$\oint_C \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \iint_S (\operatorname{rot} \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} \quad (38)$$

- **Identités vectorielles nulles fondamentales** :

$$\boxed{\operatorname{div}(\operatorname{rot} \mathbf{A}) = 0} \quad \text{et} \quad \boxed{\operatorname{rot}(\nabla V) = \mathbf{0}} \quad (39)$$

- **Identité du double rotationnel** : $\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \mathbf{A}) = \nabla(\operatorname{div} \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$.

Théorème – Potentiel électrique, Équations de Poisson & de Laplace (Y&F Ex. 23.45 à 23.88)

- **Champ électrique dérivant du potentiel** : $\boxed{\mathbf{E} = -\nabla V}$.
- **Condition d'annulation du champ électrique** : $\mathbf{E} = \mathbf{0} \iff \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial z} = 0$.
- **Équation de Poisson** (en présence de densité volumique de charge ρ) :

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \iff \boxed{\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}} \quad (40)$$

- **Équation de Laplace** (dans le vide sans charge, $\rho = 0$) : $\boxed{\nabla^2 V = 0}$.

— En symétrie sphérique $V(r)$: $\nabla^2 V = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) = -\frac{\rho(r)}{\epsilon_0}$.

Théorème – Équations de Maxwell complètes & Courant de déplacement (Y&F Ex. 29.42 à 29.45)

Dans un milieu de permittivité ϵ et perméabilité μ , en présence de densité de charge ρ et de courant de conduction $\mathbf{j}_c$:

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon} \quad (\text{Loi de Gauss}) \quad (41)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad (\text{Conservation du flux magnétique / Pas de monopôle}) \quad (42)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (\text{Loi de Faraday}) \quad (43)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu (\mathbf{j}_c + \mathbf{j}_d) \quad (\text{Loi de Maxwell-Ampère généralisée}) \quad (44)$$

— **Courant de déplacement de Maxwell** :

$$\mathbf{j}_d = \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad \text{et flux total} \quad I_d = \epsilon \frac{d\Phi_E}{dt} = \epsilon \iint_S \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \quad (45)$$

— **Champ magnétique induit dans un condensateur circulaire** de rayon R :

$$B(r) = \frac{\mu_0 I_d r}{2\pi R^2} \quad (r \leq R) \quad \text{et} \quad B(r) = \frac{\mu_0 I_d}{2\pi r} \quad (r \geq R) \quad (46)$$

— **Conducteur vs Diélectrique (Temps de relaxation)** : Pour un champ harmonique de pulsation ω , $\mathbf{j}_c = \sigma \mathbf{E} \Rightarrow \frac{\|\mathbf{j}_d\|}{\|\mathbf{j}_c\|} = \frac{\epsilon\omega}{\sigma}$ et temps de relaxation de charge : $\tau = \frac{\epsilon}{\sigma}$.

Théorème – Ondes Électromagnétiques dans un diélectrique parfait non chargé

Dans un milieu sans charges ni courants libres ($\rho = 0, \mathbf{j}_c = \mathbf{0}$) :

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \mathbf{0} \quad \text{avec} \quad v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} = \frac{c}{n} \quad (47)$$

où $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}} \approx 2,998 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ et $n = \sqrt{\epsilon_r\mu_r} \approx \sqrt{\epsilon_r}$.

Propriété – Structure de l'Onde Plane Progressive Harmonique (OPPH)

Pour une onde plane monochromatique se propageant selon la direction du vecteur d'onde $\mathbf{k} = k\mathbf{u}_k$ ($\|\mathbf{k}\| = \omega/v$) :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) \quad (48)$$

— **Transversalité absolue** : $\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = 0$ et $\mathbf{k} \cdot \mathbf{B} = 0$.

— **Relation de Faraday** : $\mathbf{B} = \frac{1}{\omega} \mathbf{k} \times \mathbf{E} = \frac{1}{v} \mathbf{u}_k \times \mathbf{E}$.

— Le trièdre $(\mathbf{E}, \mathbf{B}, \mathbf{k})$ forme un **trièdre direct strictement orthogonal**.

— Rapport d'amplitudes : $E_0 = vB_0$.

Définition – Impédance intrinsèque du milieu

L'**impédance d'onde** η quantifie le rapport d'amplitude entre champ électrique et champ magnétique exciteur $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu$:

$$\eta = \frac{E_0}{H_0} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = \mu v = \frac{1}{\epsilon v} \quad \text{Dans le vide :} \quad \eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \approx 376,73 \Omega \approx 120\pi \Omega \quad (49)$$

Dans un milieu d'indice n non magnétique ($\mu \approx \mu_0$) : $\eta = \frac{\eta_0}{n}$.

Théorème – Vecteur de Poynting, Intensité & Énergie Solaire (Syllabus TP 1 Ex. 6)

— Le **vecteur de Poynting** $\mathbf{S}$ exprime le flux instantané d'énergie électromagnétique ($\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$) :

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \mathbf{E} \times \mathbf{B} \quad (50)$$

— L'**intensité lumineuse** (moyenne temporelle du vecteur de Poynting) vaut :

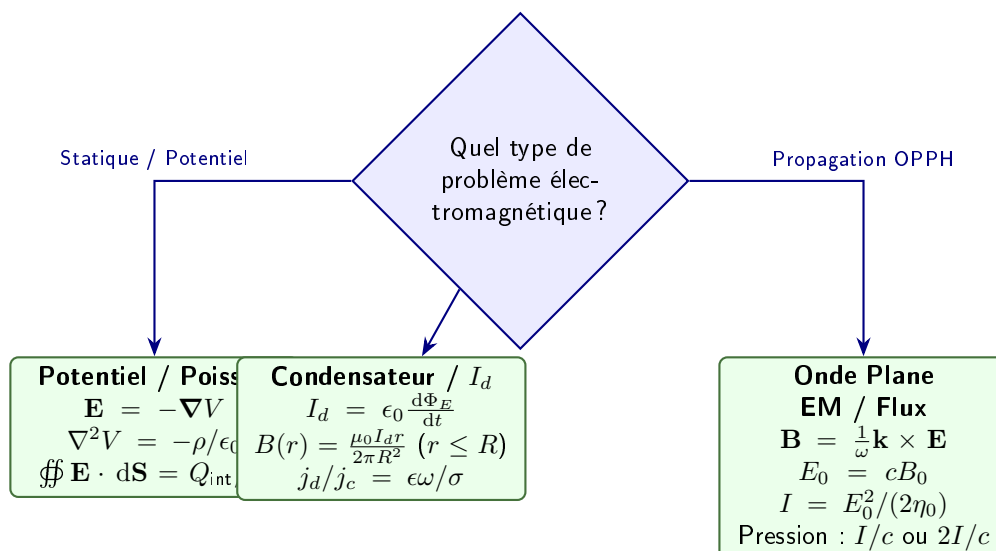
$$I = \langle \|\mathbf{S}\| \rangle = \frac{1}{2} \epsilon v E_0^2 = \frac{E_0^2}{2\eta} = \frac{c\epsilon_0 n}{2} E_0^2 = \frac{v}{2\mu} B_0^2 \quad (51)$$

— **Constante solaire et bilan orbital** : À la distance Terre-Soleil ($R_{\text{orb}} \approx 1,5 \cdot 10^{11} \text{ m}$), la puissance rayonnée par le Soleil ($P_{\odot} \approx 3,85 \cdot 10^{26} \text{ W}$) produit la constante solaire :

$$S_{\odot} = \frac{P_{\odot}}{4\pi R_{\text{orb}}^2} \approx 1361 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \implies E_0 = \sqrt{2\eta_0 S_{\odot}} \approx 1013 \text{ V/m}, \quad B_0 \approx 3,38 \mu\text{T} \quad (52)$$

— Puissance collectée par un panneau solaire d'aire A incliné de θ par rapport à la normale : $P = S_{\odot} A \cos \theta$.

— **Pression de radiation** : $P_{\text{rad}} = \frac{I}{c}$ (absorption totale) et $P_{\text{rad}} = \frac{2I}{c}$ (réflexion totale).

4.2 Procédures de résolution**4.2.1 Arbre décisionnel : Électromagnétisme, Potentiel ou Onde EM ?**

4.2.2 Procédure type : Détermination du champ magnétique induit dans un condensateur

Procédure : Calcul du courant de déplacement et du champ magnétique induit

Donnée : Condensateur à armatures circulaires de rayon R , séparées de d , soumis à une tension variable $V(t)$ ou un courant de charge $i_C(t)$.

Étape 1 Champ électrique uniforme entre les plaques : $E(t) = \frac{V(t)}{d}$.

Étape 2 Courant de déplacement total :

$$I_d = \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} = \epsilon_0 (\pi R^2) \frac{dE}{dt} = C \frac{dV}{dt} = i_C(t)$$

Le courant de déplacement entre les armatures est **rigoureusement égal** au courant de conduction dans les fils d'alimentation !

Étape 3 Application du théorème d'Ampère-Maxwell sur un cercle de rayon r centré sur l'axe :

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\ell = B(r) \cdot 2\pi r = \mu_0 I_{d,\text{enlacé}}$$

$$\begin{aligned} \text{— À l'intérieur } (r \leq R) : I_{d,\text{enlacé}} &= I_d \frac{\pi r^2}{\pi R^2} = I_d \left(\frac{r}{R}\right)^2 \implies B(r) = \frac{\mu_0 I_d r}{2\pi R^2} \\ \text{— À l'extérieur } (r \geq R) : I_{d,\text{enlacé}} &= I_d \implies B(r) = \frac{\mu_0 I_d}{2\pi r} \end{aligned}$$

Attention – Ne confondez pas flux électrique et courant de déplacement !

Le flux électrique $\Phi_E = \iint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$ s'exprime en $\text{V} \cdot \text{m}$. C'est sa **dérivée temporelle** multipliée par ϵ_0 qui constitue le courant de déplacement $I_d = \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$, dont la dimension physique est bien en **Ampères (A)**.

Astuce – Symétrie parfaite entre E et B dans le condensateur

La loi de Faraday induit un champ électrique tourbillonnaire autour d'un flux magnétique variable (**rot $\mathbf{E} = -\partial\mathbf{B}/\partial t$**). De manière parfaitement symétrique, la loi de Maxwell-Ampère induit un champ magnétique tourbillonnaire circulaire autour des lignes de champ électrique variable (**rot $\mathbf{B} = \mu_0 \epsilon_0 \partial\mathbf{E}/\partial t$**).

Exemple – Application d'examen : Champ induit dans un condensateur circulaire (Y&F Ex. 29.42)

Un condensateur à armatures circulaires de rayon $R = 5 \text{ cm} = 0,05 \text{ m}$ est chargé par un courant constant $I_C = 2 \text{ A}$.

Résolution pas-à-pas :

1. Courant de déplacement total : $I_d = I_C = 2 \text{ A}$.
2. Champ magnétique à mi-rayon ($r = 2,5 \text{ cm} = R/2$) :

$$B(R/2) = \frac{\mu_0 I_d (R/2)}{2\pi R^2} = \frac{\mu_0 I_d}{4\pi R} = \frac{(4\pi \cdot 10^{-7}) \times 2}{4\pi \times 0,05} = \frac{2 \cdot 10^{-7}}{0,05} = 4,0 \mu\text{T}$$

3. Champ magnétique au bord des armatures ($r = R = 5 \text{ cm}$) :

$$B(R) = \frac{\mu_0 I_d}{2\pi R} = \frac{(4\pi \cdot 10^{-7}) \times 2}{2\pi \times 0,05} = 8,0 \mu\text{T}$$

5 Polarisation de la Lumière & Lois de Fresnel

La polarisation caractérise l'orientation spatiale dynamique du vecteur champ électrique $\mathbf{E}$ dans le plan d'onde transverse perpendiculaire à la propagation. Ce phénomène purement vectoriel régit le comportement de la lumière aux interfaces (lois de Fresnel, angle de Brewster, réflexion totale et ondes évanescentes), l'anisotropie optique des cristaux (**biréfringence**) et la modulation de phase par lames à retard.

5.1 Rappels théoriques

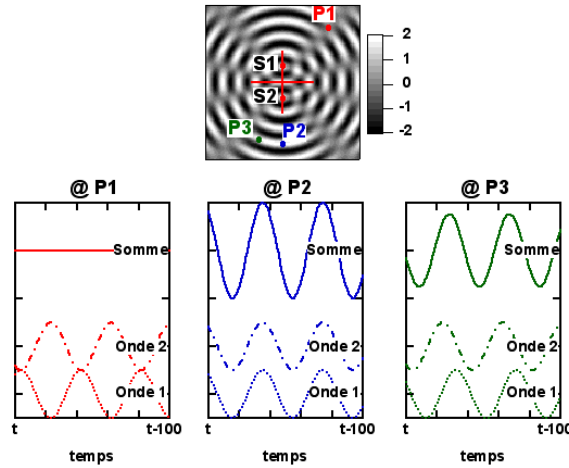


FIGURE 3 – États de polarisation du champ électrique : rectiligne, circulaire et elliptique.

Définition – États fondamentaux de polarisation

Une onde se propageant selon $\mathbf{u}_z$ possède un champ électrique décomposé en deux composantes orthogonales transverses :

$$\mathbf{E}(z, t) = E_{0x} \cos(\omega t - kz) \mathbf{u}_x + E_{0y} \cos(\omega t - kz + \Delta\phi) \mathbf{u}_y \quad (53)$$

où $\Delta\phi = \phi_y - \phi_x$ est le déphasage relatif.

- Polarisation rectiligne** : $\Delta\phi = 0$ ou π . Le vecteur $\mathbf{E}$ vibre le long d'une droite de pente $\tan \alpha = \pm \frac{E_{0y}}{E_{0x}}$.
- Polarisation circulaire** : $E_{0x} = E_{0y} = E_0$ et $\Delta\phi = \pm \frac{\pi}{2}$.
 - Si $\Delta\phi = +\pi/2$: polarisation circulaire droite (vu en regardant vers la source).
 - Si $\Delta\phi = -\pi/2$: polarisation circulaire gauche.
- Polarisation elliptique** : Cas général ($E_{0x} \neq E_{0y}$ ou $\Delta\phi \neq 0, \pm\pi/2, \pi$).

Théorème – Loi de Malus

Lorsqu'un faisceau de lumière polarisée rectilignement avec une intensité I_0 traverse un analyseur polarisant parfait dont l'axe de transmission fait un angle θ avec la direction de polarisation incidente :

$$I = I_0 \cos^2 \theta \quad (54)$$

Pour de la **lumière naturelle non polarisée** d'intensité I_{nat} traversant un polariseur idéal :

$$I = \frac{1}{2} I_{\text{nat}} .$$

Théorème – Lois de Fresnel complètes en amplitude (Séance 3, APE 4)

À l'interface plane séparant deux diélectriques d'indices n_1 et n_2 , sous un angle d'incidence θ_1 et de réfraction θ_2 reliés par Snell-Descartes ($n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$) :

- a) **Polarisation perpendiculaire / s / Transverse Électrique (TE)** : Le champ électrique est strictement orthogonal au plan d'incidence :

$$r_{\perp} = \frac{n_1 \cos \theta_1 - n_2 \cos \theta_2}{n_1 \cos \theta_1 + n_2 \cos \theta_2} = -\frac{\sin(\theta_1 - \theta_2)}{\sin(\theta_1 + \theta_2)} \quad t_{\perp} = \frac{2n_1 \cos \theta_1}{n_1 \cos \theta_1 + n_2 \cos \theta_2} = \frac{2 \sin \theta_2 \cos \theta_1}{\sin(\theta_1 + \theta_2)} \quad (55)$$

- b) **Polarisation parallèle / p / Transverse Magnétique (TM)** : Le champ électrique est contenu dans le plan d'incidence :

$$r_{\parallel} = \frac{n_2 \cos \theta_1 - n_1 \cos \theta_2}{n_2 \cos \theta_1 + n_1 \cos \theta_2} = \frac{\tan(\theta_1 - \theta_2)}{\tan(\theta_1 + \theta_2)} \quad t_{\parallel} = \frac{2n_1 \cos \theta_1}{n_2 \cos \theta_1 + n_1 \cos \theta_2} = \frac{2 \sin \theta_2 \cos \theta_1}{\sin(\theta_1 + \theta_2) \cos(\theta_1 - \theta_2)} \quad (56)$$

- c) **Incidence normale** ($\theta_1 = \theta_2 = 0$) :

$$r = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \quad t = \frac{2n_1}{n_1 + n_2} \quad R = r^2 = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2 \quad T = \frac{n_2}{n_1} t^2 = 1 - R \quad (57)$$

Théorème – Angle de Brewster, Réflexion Totale & Ondes Évanescences

- **Angle de Brewster** θ_B : Lorsque $\theta_1 + \theta_2 = 90^\circ$, le dénominateur de $r_{\parallel}$ diverge ($\tan 90^\circ \rightarrow \infty$) :

$$r_{\parallel} = 0 \iff \tan \theta_B = \frac{n_2}{n_1} \quad (58)$$

Sous l'incidence de Brewster, l'onde réfléchie est **100% polarisée rectilignement perpendiculairement au plan d'incidence** (composante TE pure).

- **Réflexion totale interne** ($n_1 > n_2$) : Pour $\theta_1 > \theta_c$ avec l'angle critique :

$$\sin \theta_c = \frac{n_2}{n_1} \quad (59)$$

Tous les coefficients deviennent complexes de module unité ($|r_{\perp}| = |r_{\parallel}| = 1 \implies R = 1$).

- **Déphasage de Fresnel en réflexion totale** : Les composantes subissent un déphasage relatif $\delta = \delta_{\parallel} - \delta_{\perp}$:

$$\tan \left(\frac{\delta}{2} \right) = \frac{\cos \theta_1 \sqrt{\sin^2 \theta_1 - (n_2/n_1)^2}}{\sin^2 \theta_1} \quad (60)$$

Une onde polarisée rectiligne à 45° ressort **polarisée elliptiquement** (principe du rhombe de Fresnel pour créer une onde circulaire).

- **Onde évanescence** : Dans le milieu 2, l'amplitude décroît selon e^{-z/d_p} avec la profondeur de pénétration :

$$d_p = \frac{\lambda_0}{2\pi \sqrt{n_1^2 \sin^2 \theta_1 - n_2^2}} \quad (61)$$

Propriété – Lames à retard biréfringentes & Réfractométrie (APE 4 Ex. 13 & 16)

- Déphasage optique introduit par une lame d'épaisseur e entre axes neutres : $\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda_0} |n_e -$

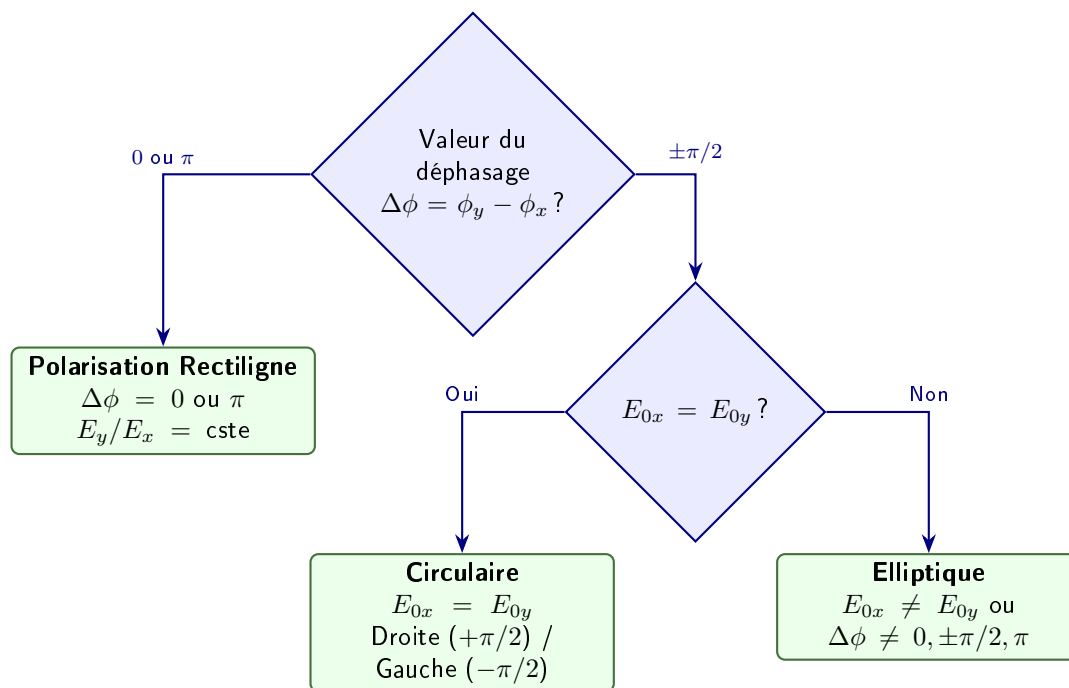
$n_o|e.$

- **Lame quart d'onde** ($\lambda/4$) : $\Delta\phi = \frac{\pi}{2} \iff e_{\lambda/4} = \frac{\lambda_0}{4|n_e - n_o|}$. Transforme une polarisation rectiligne à $\pm 45^\circ$ des axes en polarisation **circulaire** (et vice-versa).
- **Lame demi-onde** ($\lambda/2$) : $\Delta\phi = \pi \iff e_{\lambda/2} = \frac{\lambda_0}{2|n_e - n_o|}$. Fait tourner le plan d'une polarisation rectiligne d'un angle 2θ symétriquement par rapport à l'axe rapide.
- **Réfractomètre différentiel (Syllabus TP 3 Ex. 13)** : Deux cuves prismatiques accolées séparées par une diagonale d'angle α . La déviation angulaire d'un faisceau laser permet de mesurer un très faible écart d'indice Δn (ex : concentration chimique) :

$$\Delta\theta \approx \frac{\Delta n}{\tan \alpha} \quad (62)$$

5.2 Procédures de résolution

5.2.1 Arbre décisionnel : identification de l'état de polarisation



Attention – Déphasage de π lors de la réflexion normale !

En incidence normale :

$$r = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}$$

Si l'onde arrive d'un milieu moins réfringent vers un milieu plus réfringent ($n_1 < n_2$), on a $r < 0$: l'onde réfléchie subit un **saut de phase brutal de π** . Si $n_1 > n_2$, on a $r > 0$, aucun déphasage n'apparaît. Ce saut de phase est capital pour les interférences en couches minces !

Astuce – Reconnaître le sens de rotation d'une onde circulaire

Pour $\mathbf{E}(z, t) = E_0 \cos(\omega t - kz)\mathbf{u}_x + E_0 \cos(\omega t - kz + \Delta\phi)\mathbf{u}_y$ en $z = 0$:

- À $t = 0$: $\mathbf{E} = E_0\mathbf{u}_x + E_0 \cos(\Delta\phi)\mathbf{u}_y$.
- À $t = \frac{\pi}{2\omega}$: $\mathbf{E} = 0\mathbf{u}_x - E_0 \sin(\Delta\phi)\mathbf{u}_y$.
- Si $\Delta\phi = +\pi/2$: le vecteur passe de $(E_0, 0)$ à $(0, -E_0)$, tournant dans le sens horaire (circulaire

droite).

Exemple – Cascade de polariseurs croisés avec lame intermédiaire

De la lumière naturelle d'intensité I_0 traverse un premier polariseur P_1 vertical ($\theta_1 = 0^\circ$). Elle traverse ensuite un polariseur P_2 incliné à $\theta_2 = 45^\circ$, puis un troisième polariseur P_3 horizontal ($\theta_3 = 90^\circ$).

Résolution pas-à-pas :

1. Après P_1 (lumière naturelle) : $I_1 = \frac{1}{2}I_0$. La polarisation devient strictement verticale.
2. Après P_2 : L'axe de P_2 fait un angle de 45° avec P_1 . Par la loi de Malus :

$$I_2 = I_1 \cos^2(45^\circ - 0^\circ) = \left(\frac{1}{2}I_0\right) \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}I_0$$

3. Après P_3 : L'axe de P_3 fait un angle de 45° avec la nouvelle polarisation fixée par P_2 ($90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$) :

$$I_3 = I_2 \cos^2(90^\circ - 45^\circ) = \left(\frac{1}{4}I_0\right) \left(\frac{1}{2}\right) = \boxed{\frac{1}{8}I_0 = 12,5\% I_0}$$

Remarque fondamentale : Sans le polariseur intermédiaire P_2 , deux polariseurs croisés à 90° éteignent totalement la lumière ($I = 0$). L'insertion de P_2 restaure de la lumière transmise en projetant l'état ondulatoire !

6 Interférences Lumineuses, Couches Minces & Interférométrie

L'interférence est la manifestation la plus spectaculaire de la nature ondulatoire : en superposant deux ou plusieurs ondes cohérentes, l'intensité totale résultante n'est pas la simple somme des intensités, mais fait alterner des zones d'extinction totale et des franges ultra-brillantes. On distingue deux grandes familles : la **division du front d'onde** (fentes d'Young, réseaux d'antennes) et la **division d'amplitude** (couches minces antireflet, bulles de savon, **coin d'air**, **interféromètre de Michelson** et **diffraction des rayons X de Bragg**).

6.1 Rappels théoriques

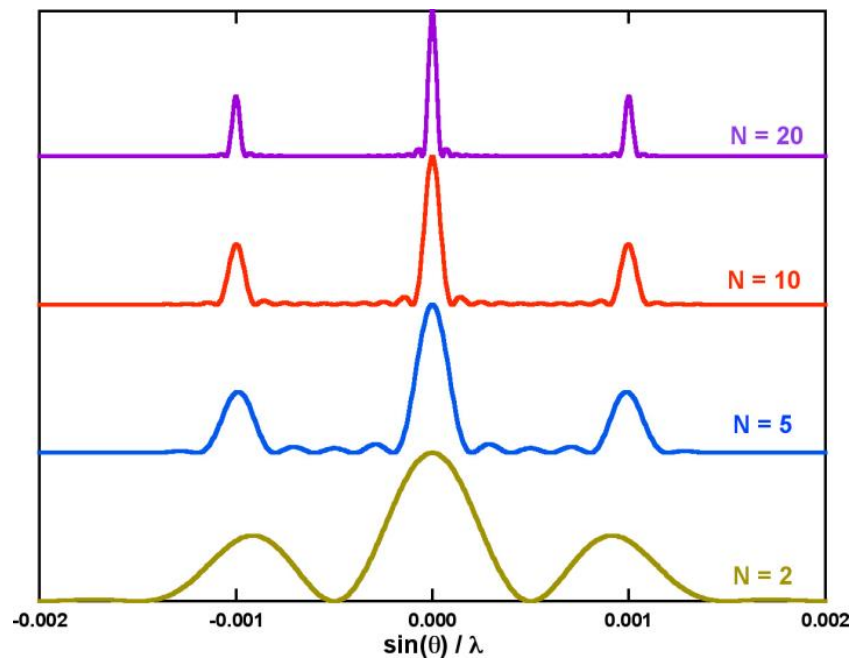


FIGURE 4 – Figure d'interférence des fentes d'Young : franges rectilignes équidistantes.

Théorème – Formule fondamentale d'interférence à deux ondes

La superposition de deux ondes monochromatiques de même pulsation ω , d'intensités I_1 et I_2 , déphasées d'une différence de phase $\Delta\phi$, donne une intensité résultante :

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\Delta\phi) \quad (63)$$

Si les deux faisceaux ont même amplitude ($I_1 = I_2 = I_0$) :

$$I = 4I_0 \cos^2\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right) \quad (64)$$

Le **contraste** (ou visibilité) des franges vaut : $V = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} = \frac{2\sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2} \in [0, 1]$.

Théorème – Dispositif des Fentes d'Young (Division de front d'onde)

Deux fentes parallèles distantes de d sont éclairées en incidence normale par une onde plane monochromatique de longueur d'onde λ . Sur un écran situé à une distance $D \gg d$:

- Différence de marche géométrique : $\delta = d \sin \theta \approx d \frac{y}{D}$.
- Déphasage : $\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda} \delta = \frac{2\pi dy}{\lambda D}$.
- **Franges brillantes** (maxima constructifs) : $\delta = m\lambda \iff y_m = m \frac{\lambda D}{d}, \quad m \in \mathbb{Z}$.
- **Franges sombres** (minima destructifs) : $\delta = (m + 1/2)\lambda \iff y'_m = \left(m + \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda D}{d}, \quad m \in \mathbb{Z}$.
- **Interfrange constant** : $i = y_{m+1} - y_m = \frac{\lambda D}{d}$.
- **Insertion d'une lame transparente d'indice n et d'épaisseur e sur un faisceau** :

$$\Delta y = \frac{(n-1)eD}{d}.$$

Théorème – Interférences en Couches Minces & Revêtements Antireflet (Séance 4, APE 5 & 6)

Considérons une couche mince d'épaisseur e et d'indice n_2 , déposée sur un substrat d'indice n_3 , éclairée sous l'angle θ_1 depuis un milieu n_1 (angle de réfraction dans le film θ_2 tel que $n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$) :

- **Différence de chemin optique** entre les deux rayons réfléchis :

$$\delta = 2n_2 e \cos \theta_2 \quad (\text{en incidence normale } \theta_1 = \theta_2 = 0 : \delta = 2n_2 e) \quad (65)$$

- **Règle fondamentale du saut de phase de π** : Une réflexion sur une interface introduit un déphasage de π si et seulement si l'indice du milieu réflecteur est supérieur à celui du milieu incident ($n_{\text{milieu } 2} > n_{\text{milieu } 1}$).

Cas 1 : Un seul saut de phase de π (ex : film de savon dans l'air $n_{\text{air}} < n_{\text{eau}} > n_{\text{air}}$; nappe d'huile sur l'eau $n_{\text{air}} < n_{\text{huile}} > n_{\text{eau}}$) :

$$\text{Interférence constructive (brillance) : } 2n_2 e \cos \theta_2 = \left(m + \frac{1}{2}\right) \lambda_0, \quad m \in \mathbb{N} \quad (66)$$

$$\text{Interférence destructive (extinction / noir) : } 2n_2 e \cos \theta_2 = m \lambda_0, \quad m \in \mathbb{N}^* \quad (67)$$

Cas 2 : Zéro ou Deux sauts de phase de π (ex : couche antireflet sur verre $n_{\text{air}} < n_{\text{couche}} < n_{\text{verre}}$) :

$$\text{Interférence constructive : } 2n_2 e \cos \theta_2 = m \lambda_0, \quad m \in \mathbb{N} \quad (68)$$

$$\text{Interférence destructive (extinction) : } 2n_2 e \cos \theta_2 = \left(m + \frac{1}{2}\right) \lambda_0, \quad m \in \mathbb{N} \quad (69)$$

- **Condition de couche antireflet quart-d'onde idéale** (en incidence normale) :

$$e_{\min} = \frac{\lambda_0}{4n_2} \quad \text{avec l'indice optimal d'adaptation } n_2 = \sqrt{n_1 n_3} \quad (70)$$

Propriété – Coin d'air, Interféromètre de Michelson & Loi de Bragg (Séance 4)

- a) **Coin d'air et lame biseautée (Interro 2002–2003)** : Deux lames planes formant un petit angle $\alpha \ll 1$ produisent des franges rectilignes d'égale épaisseur parallèles à l'arête de contact :

$$\boxed{i = \frac{\lambda_0}{2\alpha}} \quad (\text{dans l'air}) \quad \text{ou} \quad \boxed{i = \frac{\lambda_0}{2n\alpha}} \quad (\text{rempli de liquide d'indice } n) \quad (71)$$

À l'arête ($e = 0$), le saut de phase de π sur le verre inférieur impose que la frange de contact est **strictement noire**.

- b) **Interféromètre de Michelson (Examen Juin 2003)** : La translation d'un miroir mobile d'une distance mécanique Δx provoque le défilement d'un nombre Δm de franges sur l'écran :

$$\boxed{\Delta x = \Delta m \frac{\lambda_0}{2}} \iff \boxed{\Delta m = \frac{2\Delta x}{\lambda_0}} \quad (72)$$

L'insertion d'une lame transparente d'épaisseur e et d'indice n sur l'un des bras fait défiler :

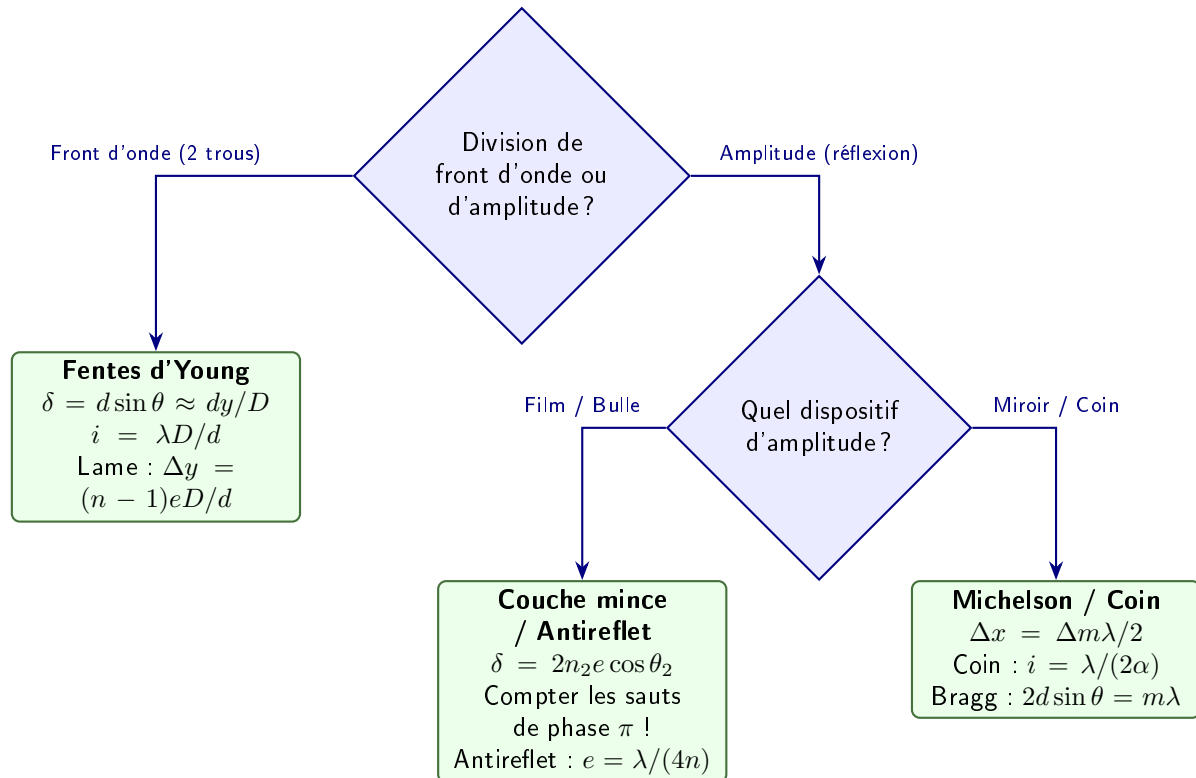
$$\boxed{\Delta m = \frac{2(n-1)e}{\lambda_0}}.$$

- c) **Diffraction des rayons X de Bragg (Examen Août 2005)** : Réflexion sur des plans réticulaires atomiques distants de d sous un angle rasant θ :

$$\boxed{2d \sin \theta = m\lambda_0}, \quad m \in \mathbb{N}^* \quad (73)$$

- d) **Réseau d'antennes radio discrètes (Examen Janvier 2010)** : Pour N antennes séparées de d , alimentées avec un déphasage électrique α_{alim} , le déphasage total s'écrit $\psi = kd \cos \theta + \alpha_{\text{alim}}$, avec le lobe principal orienté selon $\cos \theta_{\text{max}} = -\frac{\alpha_{\text{alim}}}{kd}$.

6.2.1 Arbre décisionnel : quel système d'interférences identifier ?

**Attention – Le piège mortel des sauts de phase en couche mince !**

Avant d'écrire la condition d'interférence constructive ou destructive, **comptez impérativement le nombre de sauts de phase de π aux interfaces** :

- Si $n_1 < n_2 < n_3$ (revêtement antireflet sur verre) : il y a **deux sauts de phase**, donc déphasage net nul. La condition de noir (antireflet) est $2n_2e = (m + 1/2)\lambda$.
- Si $n_1 < n_2 > n_3$ (nappe de pétrole ou bulle de savon) : il y a **un seul saut de phase** (à la 1^{re} interface). La condition de noir est alors inversée : $2n_2e = m\lambda$!

Astuce – Couche antireflet express

Pour annuler le reflet d'un verre d'indice $n_v = 1,50$ dans l'air à $\lambda_0 = 550$ nm :

$$n_{\text{couche}} = \sqrt{1 \times 1,50} \approx 1,22 \quad \text{et} \quad e_{\text{min}} = \frac{\lambda_0}{4n_{\text{couche}}} = \frac{550}{4 \times 1,22} \approx \mathbf{112 \text{ nm}}$$

Cette boîte pliée en 30 secondes rapporte l'intégralité des points en examen !

Exemple – Application d'examen : Iridescence d'une nappe de pétrole (Interrogation Nov. 2006)

Une fine pellicule de pétrole ($n_2 = 1,45$) d'épaisseur $e = 460$ nm flotte sur l'eau de mer ($n_3 = 1,33$). Elle est éclairée en incidence normale par la lumière blanche du Soleil ($400 \text{ nm} \leq \lambda_0 \leq 700 \text{ nm}$).

Résolution pas-à-pas :

1. **Analyse des réflexions aux deux dioptries :**

- Dioptre 1 (air $\rightarrow$ pétrole, $1,00 < 1,45$) : saut de phase de π .
 - Dioptre 2 (pétrole $\rightarrow$ eau, $1,45 > 1,33$) : pas de saut de phase (milieu moins réfringent).
- Il y a un seul saut de phase net de π .

2. **Condition d'interférence constructive (couleur vue réfléchie) :**

$$2n_2e = \left(m + \frac{1}{2}\right) \lambda_0 \implies \lambda_0 = \frac{2n_2e}{m + 1/2} = \frac{2 \times 1,45 \times 460 \text{ nm}}{m + 1/2} = \frac{1334 \text{ nm}}{m + 1/2}$$

3. **Test des ordres entiers m :**

- Pour $m = 0$: $\lambda_0 = \frac{1334}{0,5} = 2668 \text{ nm}$ (infrarouge, invisible).
- Pour $m = 1$: $\lambda_0 = \frac{1334}{1,5} = \mathbf{889 \text{ nm}}$ (proche infrarouge).
- Pour $m = 2$: $\lambda_0 = \frac{1334}{2,5} = \mathbf{533,6 \text{ nm}} \in [400, 700] \text{ nm}$ (**vert-jaune visible**).
- Pour $m = 3$: $\lambda_0 = \frac{1334}{3,5} = \mathbf{381 \text{ nm}}$ (ultraviolet, invisible).

Conclusion : La nappe d'huile apparaîtra avec un reflet dominant vert éclatant ($\lambda_0 = 534 \text{ nm}$).

7 Diffraction de Fraunhofer & Réseaux

La diffraction traduit la tendance naturelle des ondes à s'étaler dans l'espace dès qu'elles rencontrent un obstacle ou une ouverture dont les dimensions sont comparables à leur longueur d'onde. En régime de champ lointain (Fraunhofer), le profil d'intensité s'obtient par transformée de Fourier spatiale de la fonction d'ouverture. Ce chapitre résout également la grande question d'examen de Janvier 2025.

7.1 Rappels théoriques

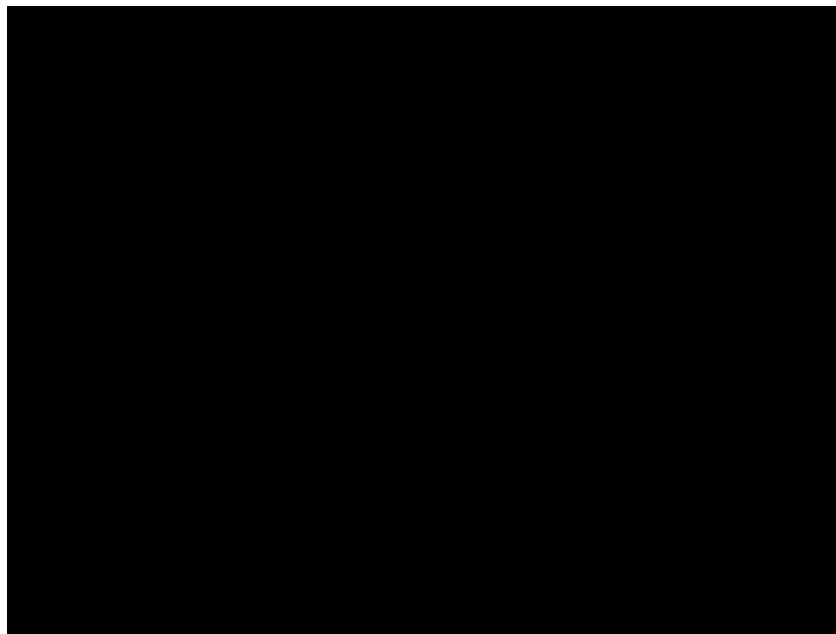


FIGURE 5 – Profil d'intensité de la diffraction de Fraunhofer par une fente simple.

Théorème – Diffraction par une fente simple de largeur a

Une fente rectangulaire infiniment longue selon y et de largeur a selon x , éclairée par une onde plane monochromatique sous incidence normale, produit à l'infini une intensité angulaire :

$$I(\theta) = I_0 \left(\frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2 = I_0 \operatorname{sinc}^2(\beta) \quad \text{avec} \quad \beta = \frac{\pi a \sin \theta}{\lambda} \quad (74)$$

— **Minima de diffraction (intensité strictement nulle) :**

$$\beta = m\pi \iff a \sin \theta = m\lambda, \quad m \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\} \quad (m \neq 0) \quad (75)$$

— **Largeur angulaire de la tache centrale ($m = \pm 1$) :** $\Delta\theta_0 = 2\theta_1 \approx \frac{2\lambda}{a}$.

— **Largeur spatiale de la tache centrale sur un écran à distance D :** $L_0 \approx \frac{2\lambda D}{a}$.

Théorème – Ouverture circulaire & Critère de résolution de Rayleigh

Pour une ouverture circulaire de diamètre D_{ouv} , la figure de diffraction (tache d'Airy) s'annule au premier zéro de la fonction de Bessel J_1 :

$$\sin \theta_1 = 1,22 \frac{\lambda}{D_{ouv}} \quad (76)$$

Le **critère de Rayleigh** stipule que deux sources ponctuelles incohérentes sont tout juste résolues lorsque le maximum central de la première coïncide avec le premier minimum d'Airy de la seconde :

$$\theta_{\min} \approx 1,22 \frac{\lambda}{D_{ouv}} \quad (77)$$

Théorème – Combinaison Interférence + Diffraction (N fentes / Réseaux)

Pour un ensemble de N fentes identiques de largeur individuelle a , régulièrement espacées d'un pas de réseau d ($d > a$) :

$$I(\theta) = I_{\max} \underbrace{\left(\frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2}_{\text{Enveloppe de diffraction}} \times \underbrace{\left(\frac{\sin(N\alpha)}{\sin \alpha} \right)^2}_{\text{Franges d'interférence multi-ondes}} \quad (78)$$

où $\beta = \frac{\pi a \sin \theta}{\lambda}$ et $\alpha = \frac{\pi d \sin \theta}{\lambda}$.

- **Pics principaux d'interférence** : $\alpha = m\pi \iff \boxed{d \sin \theta = m\lambda}$, $m \in \mathbb{Z}$.
- **Ordres manquants (Missing orders)** : Si un pic principal d'interférence coïncide avec un zéro de l'enveloppe de diffraction :

$$\sin \theta = \frac{m\lambda}{d} = \frac{p\lambda}{a} \implies \boxed{\frac{d}{a} = \frac{m}{p}}$$

Alors l'ordre d'interférence m est **complètement éteint** ($I = 0$) !

- **Incidence oblique sous un angle α_{inc}** : La différence de marche totale entre deux fentes consécutives devient :

$$\boxed{\delta = d(\sin \theta - \sin \alpha_{inc})} \implies d(\sin \theta - \sin \alpha_{inc}) = m\lambda \quad (79)$$

- **Pouvoir de résolution chromatique d'un réseau (R)** : Pour séparer deux longueurs d'onde très proches λ et $\lambda + \Delta\lambda$ au m -ième ordre avec un réseau éclairé sur N fentes utiles (critère de Rayleigh) :

$$\boxed{R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = mN} \quad (80)$$

7.2 Exemple résolu réel : Examen Janvier 2025 (Question 1 Ondes)**Exemple – Résolution intégrale de la Question 1 de l'Examen de Janvier 2025**

Énoncé officiel : Lors d'un laboratoire, Hedy envoie un laser de longueur d'onde $\lambda = 600 \text{ nm}$ perpendiculairement sur une plaque percée de fentes rectangulaires de largeur $a = 1,5 \mu\text{m}$ espacées de $d = 4 \mu\text{m}$. Derrière la plaque, à une distance $D = 3 \text{ m}$, est placé un écran de largeur totale $W = 2 \text{ m}$ centré sur l'axe du laser.

Résolution intégrale détaillée :

a) Nombre de points lumineux visibles sur l'écran : L'écran s'étend de $y = -1$ m à $y = +1$ m. L'angle maximal sous-tendu est :

$$\tan \theta_{\max} = \frac{W/2}{D} = \frac{1 \text{ m}}{3 \text{ m}} = \frac{1}{3} \implies \sin \theta_{\max} = \frac{1}{\sqrt{1+3^2}} = \frac{1}{\sqrt{10}} \approx 0,3162$$

Les pics d'interférence sont donnés par $d \sin \theta = m\lambda \implies \sin \theta = \frac{m\lambda}{d} = m \frac{0,6 \mu\text{m}}{4 \mu\text{m}} = 0,15 m$. Pour rester sur l'écran :

$$|\sin \theta| \leq \sin \theta_{\max} \iff 0,15|m| \leq 0,3162 \implies |m| \leq \frac{0,3162}{0,15} = 2,108 \implies m \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$$

Vérifions si certains ordres sont éteints par la diffraction : le premier zéro de diffraction apparaît à $\sin \theta = \lambda/a = 0,6/1,5 = 0,40 > \sin \theta_{\max}$. Aucun ordre n'est éteint sur l'écran.

Il y a donc exactement 5 points lumineux visibles sur cet écran ($m = 0, \pm 1, \pm 2$).

(Note : si l'on prend l'approximation paraxiale $\sin \theta \approx \tan \theta = 1/3$, $m \leq 0,333/0,15 = 2,22$, conduisant au même résultat rigoureux).

b) Intensité du dernier point visible au bord de l'écran : Le dernier point visible correspond à $m = 2$, à l'angle tel que $\sin \theta_2 = 2 \times 0,15 = 0,30$. L'argument de diffraction vaut :

$$\beta = \frac{\pi a \sin \theta_2}{\lambda} = \pi \times \frac{1,5}{0,6} \times 0,30 = 0,75\pi = \frac{3\pi}{4}$$

L'intensité relative est dictée par le facteur de forme de diffraction :

$$I = I_{\text{centre}} \left(\frac{\sin(3\pi/4)}{3\pi/4} \right)^2 = 1 \text{ W/m}^2 \times \left(\frac{\sqrt{2}/2}{3\pi/4} \right)^2 = \frac{2}{\pi^2 \times 9/16} = \frac{8}{9\pi^2} \approx \text{0,090 W/m}^2$$

c) Nombre de points visibles si l'écran était de largeur infinie : La limite physique de diffraction dans le demi-espace avant est $|\sin \theta| \leq 1$:

$$|m| \leq \frac{d}{\lambda} = \frac{4 \mu\text{m}}{0,6 \mu\text{m}} = \frac{20}{3} \approx 6,67 \implies m \in \{-6, \dots, +6\} \quad (13 \text{ ordres potentiels})$$

Ordres manquants : Les zéros de diffraction apparaissent lorsque $\sin \theta = p \frac{\lambda}{a} = p \times 0,40$. Égalité $d \sin \theta = m\lambda \iff \frac{m}{p} = \frac{d}{a} = \frac{4}{1,5} = \frac{8}{3}$. Pour $p = 3$, $m = 8 > 6$. Il n'y a donc **aucun ordre manquant** parmi les ordres réels $|m| \leq 6$.

Nombre total de points visibles pour un écran infini : $2 \times 6 + 1 = \text{13 points}$.

d) Effet des 5 modifications sur le nombre de points visible en (a) :

- Onde non sinusoïdale :** Inchangé, la périodicité spatiale et la longueur d'onde de Fourier fondamentale restent identiques.
- Polarisation circulaire au lieu de linéaire :** Inchangé, l'intensité scalaire d'interférence ne dépend pas de l'hélicité.
- Largeur des fentes $a = 500 \text{ nm}$ au lieu de $1,5 \mu\text{m}$:** Inchangé, car l'écartement $d = 4 \mu\text{m}$ (qui fixe la position des pics) ne varie pas, et le premier zéro de diffraction s'éloigne encore plus ($\sin \theta_1 = 0,6/0,5 = 1,2 > 1$).
- Gaz d'indice $n = 1,2$:** La longueur d'onde devient $\lambda' = \lambda/n = 500 \text{ nm}$. Le pas angulaire devient $\sin \theta = m(0,5/4) = 0,125 m$. Alors $|m| \leq 0,3162/0,125 = 2,53 \implies$ toujours $m \in \{0, \pm 1, \pm 2\}$, le nombre reste inchangé à 5 !
- Fils fins au lieu de fentes :** Par le **théorème de Babinet**, la figure de diffraction/interférence est strictement identique (hors centre non diffracté).

e) **Incidence oblique conservant la même position des points lumineux :** Pour que la position angulaire des franges soit conservée, il faut que la nouvelle condition d'interférence coïncide avec l'ancienne modulo un décalage entier d'ordres :

$$d(\sin \theta - \sin \alpha) = m' \lambda \implies \sin \alpha = k \frac{\lambda}{d} = k \times 0,15, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Pour rester dans le domaine physique $|\sin \alpha| \leq 1$ avec $\alpha \neq 0$:

$$\alpha = \arcsin(0,15 k) \quad \text{pour } k \in \{\pm 1, \pm 2, \dots, \pm 6\}$$

f) **Vitesse de propagation sur la corde de guitare :** Longueur de la corde $L = 50 \text{ cm} = 0,50 \text{ m}$. Le temps entre la position la plus basse et la position la plus haute correspond à une **demi-période** temporelle :

$$\frac{T}{2} = 1,5 \text{ ms} \implies T = 3,0 \text{ ms} = 3 \cdot 10^{-3} \text{ s} \implies f = \frac{1}{T} = 333,33 \text{ Hz}$$

Pour le mode fondamental d'une corde de guitare fixée aux deux extrémités : $\lambda = 2L = 2 \times 0,50 \text{ m} = 1,0 \text{ m}$. La vitesse de propagation des ondes transversales sur la corde est donc :

$$v = \lambda f = \frac{2L}{T} = \frac{1,0 \text{ m}}{3 \cdot 10^{-3} \text{ s}} \approx 333,3 \text{ m/s} \quad (81)$$

8 Rayonnement Électromagnétique, Antennes & Canaux de Propagation

Le rayonnement électromagnétique décrit le détachement irréversible des champs dynamiques oscillants ($\mathbf{E}, \mathbf{B}$) de leur source pour transporter de l'énergie et de l'information jusqu'à l'infini. Modélisé par le **dipôle oscillant de Hertz**, il constitue le fondement de toute l'ingénierie des télécommunications sans fil. Ce chapitre traite de la **résistance de rayonnement**, du **gain d'antenne**, du **bilan de liaison de Friis en espace libre** et des lois fondamentales de propagation terrestre : le **canal multi-trajet à deux rayons (Two-Ray Ground Model)** avec sa **décroissance critique en $1/d^4$** et la **réflexion ionosphérique**.

8.1 Rappels théoriques

Théorème – Dipôle oscillant de Hertz (Dipôle électrique élémentaire)

Considérons un dipôle électrique court de longueur $L \ll \lambda$, parcouru par un courant harmonique uniforme $i(t) = I_0 \cos(\omega t)$ (moment dipolaire $\mathbf{p}(t) = p_0 \sin(\omega t) \mathbf{u}_z$ avec $p_0 = I_0 L / \omega$) :

- **Champs rayonnés en zone lointaine de Fraunhofer** ($r \gg \lambda$ et $r \gg L$) :

$$\mathbf{E}(r, \theta, t) = \frac{\mu_0 \omega I_0 L}{4\pi r} \sin \theta \cos(\omega t - kr) \mathbf{u}_\theta \quad \text{et} \quad \mathbf{B}(r, \theta, t) = \frac{E_\theta}{c} \mathbf{u}_\phi \quad (82)$$

- Les champs forment une onde sphérique transverse locale orthogonale ($\mathbf{u}_r, \mathbf{u}_\theta, \mathbf{u}_\phi$) dont l'amplitude décroît en $1/r$.
- Le rayonnement est **nul selon l'axe du dipôle** ($\theta = 0, \pi$) et **maximal dans le plan équatorial** ($\theta = \pi/2$).
- **Vecteur de Poynting moyen** (densité de puissance surfacique en $\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$) :

$$\langle \mathbf{S}(r, \theta) \rangle = \frac{|E_{\theta, \max}|^2}{2\eta_0} \mathbf{u}_r = \frac{\eta_0 I_0^2}{8\pi^2 r^2} \left(\frac{\pi L}{\lambda} \right)^2 \sin^2 \theta \mathbf{u}_r \quad (83)$$

- **Puissance totale rayonnée & Résistance de rayonnement (R_{rad})** : En intégrant le flux de $\langle \mathbf{S} \rangle$ sur une sphère fermée de rayon r ($\int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = 4/3$) :

$$P_{\text{tot}} = \frac{1}{2} R_{\text{rad}} I_0^2 \quad \text{avec} \quad R_{\text{rad}} = \frac{2\pi\eta_0}{3} \left(\frac{L}{\lambda} \right)^2 = 80\pi^2 \left(\frac{L}{\lambda} \right)^2 \approx 789,6 \left(\frac{L}{\lambda} \right)^2 [\Omega] \quad (84)$$

(Pour une antenne dipôle demi-onde résonnante $L = \lambda/2$: $R_{\text{rad}} \approx 73,1 \Omega$).

Théorème – Directivité, Gain & Bilan de Liaison en Espace Libre de Friis (TP 6)

- **Directivité D et Gain G** : $G = \eta_{\text{ant}} D \leq D$ (rapport d'intensité maximale comparée à une antenne isotrope émettant la même puissance totale). Pour un dipôle élémentaire de Hertz : $G_{\text{max}} = 1,5$ (1,76 dBi). Pour un dipôle demi-onde : $G_{\text{max}} \approx 1,64$ (2,15 dBi).
- **Puissance Isotrope Rayonnée Équivalente (PIRE / EIRP)** :

$$\text{PIRE} = P_t \cdot G_t \quad (85)$$

À distance d en espace libre, la densité de puissance surfacique vaut : $S(d) = \frac{\text{PIRE}}{4\pi d^2} = \frac{P_t G_t}{4\pi d^2}$.

- **Surface effective de réception A_{eff}** d'une antenne de gain G_r : $A_{\text{eff}} = \frac{\lambda^2}{4\pi} G_r$.

- **Formule de transmission de Friis (Espace libre sans obstacle)** : La puissance reçue par l'antenne réceptrice s'exprime par le produit de la densité incidente et de la surface effective :

$$P_r = S(d) \cdot A_{\text{eff}} = P_t G_t G_r \left(\frac{\lambda}{4\pi d} \right)^2 \quad (86)$$

L'affaiblissement d'espace libre (*Free Space Path Loss*) croît en d^2 (soit 20 dB/décade).

Théorème – Canal Multi-trajet Terrestre : Modèle à Deux Rayons (Two-Ray Ground) (Examen Janvier 2015)

Considérons une station de base à hauteur h_t et un récepteur mobile à hauteur h_r séparés d'une distance horizontale $d \gg h_t, h_r$ au-dessus d'une chaussée plane réfléchissante (sol) :

- L'onde atteint le récepteur par deux trajets : le **rayon direct** (r_1) et le **rayon réfléchi sur le sol** (r_2).
- Différence de chemin géométrique à l'ordre 1 :

$$r_1 \approx d + \frac{(h_t - h_r)^2}{2d}, \quad r_2 \approx d + \frac{(h_t + h_r)^2}{2d} \implies \Delta r = r_2 - r_1 \approx \frac{2h_t h_r}{d} \quad (87)$$

- **Saut de phase de π à la réflexion sur le sol** : en incidence rasante, le coefficient de réflexion vaut $r_{\text{sol}} \approx -1 = e^{j\pi}$.
- Le déphasage total s'écrit donc : $\Delta\phi = k\Delta r + \pi = \frac{4\pi h_t h_r}{\lambda d} + \pi$.
- Champ électrique résultant en champ lointain terrestre :

$$E_{\text{tot}} \approx E_{\text{direct}} \left(1 - e^{-j \frac{4\pi h_t h_r}{\lambda d}} \right)$$

- **Régime asymptotique à grande distance** ($d > d_{\text{seuil}} = \frac{4\pi h_t h_r}{\lambda}$) : Comme $\frac{4\pi h_t h_r}{\lambda d} \ll 1$, le développement limité $1 - e^{-jx} \approx jx$ conduit à :

$$|E_{\text{tot}}| \approx |E_{\text{direct}}| \cdot \frac{4\pi h_t h_r}{\lambda d} = \left(\frac{\sqrt{2\eta_0 P_t G_t}}{\sqrt{4\pi d}} \right) \frac{4\pi h_t h_r}{\lambda d} \propto \frac{1}{d^2} \quad (88)$$

- **Puissance reçue asymptotique Two-Ray Ground** :

$$P_r \approx P_t G_t G_r \frac{h_t^2 h_r^2}{d^4} \quad (89)$$

Règle cardinale d'examen : À grande distance au-dessus d'un sol, la puissance reçue s'effondre en $1/d^4$ (décroissance de **40 dB par décade**) et devient **strictement indépendante de la longueur d'onde λ et de la fréquence f** !

Propriété – Réflexion ionosphérique et portée radio FM (Examen Janvier 2015)

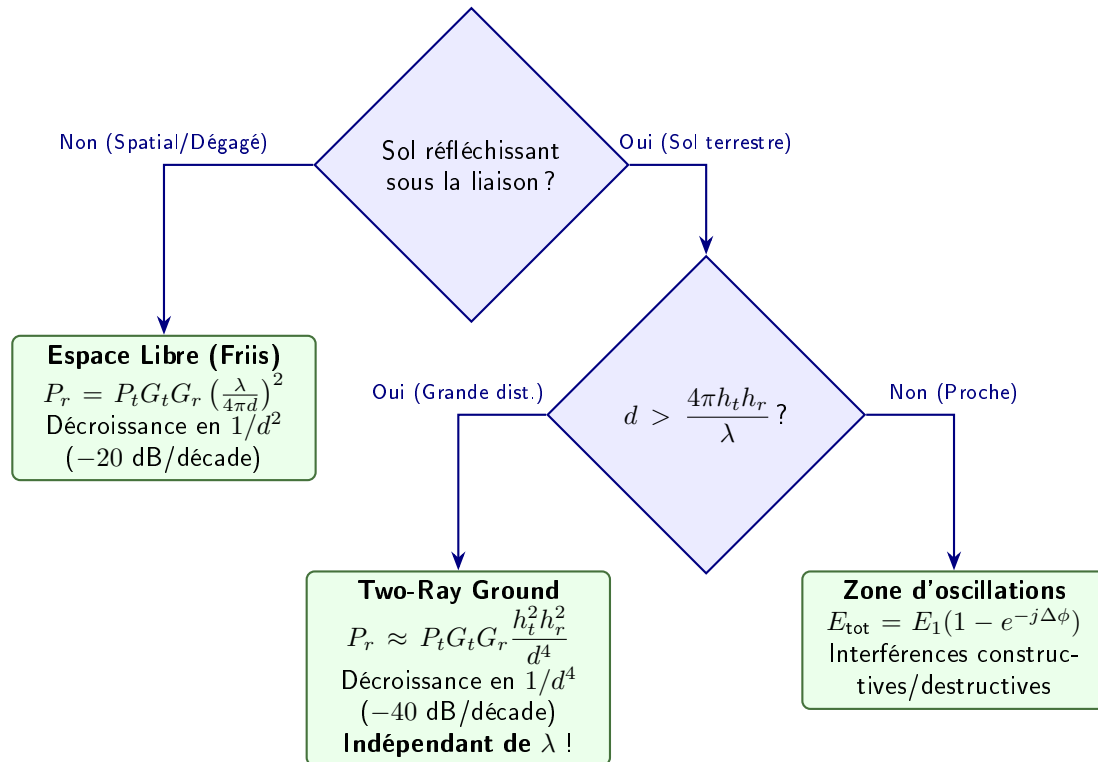
À haute altitude ($h \approx 100 - 300$ km), l'ionosphère agit comme un plasma ionisé de fréquence de coupure plasma f_p .

- Indice de réfraction du plasma : $n(f) = \sqrt{1 - (f_p/f)^2}$.
- Pour $f > f_p$, la réflexion totale nécessite un angle d'incidence oblique suffisant : $\sin \theta_i \geq n = \sqrt{1 - (f_p/f)^2}$.
- Distance parcourue lors d'un bond de réflexion ionosphérique (modèle Terre plane) :

$$d_{\text{hop}} = 2h \tan \theta_i \quad (90)$$

8.2 Procédures de résolution

8.2.1 Arbre décisionnel : quel modèle de canal radio choisir ?



8.2.2 Procédure type : Bilan de liaison radio et dimensionnement de portée

Procédure : Calcul de puissance reçue et portée limite

Donnée : Puissance d'émission P_t , gains G_t, G_r , fréquence f ($\lambda = c/f$), hauteurs d'antennes h_t, h_r , sensibilité récepteur $P_{r,\min}$.

Étape 1 Longueur d'onde et PIRE : Calculer $\lambda = c/f$ et $\text{PIRE} = P_t G_t$.

Étape 2 Distance seuil de transition : Évaluer $d_{\text{seuil}} = \frac{4\pi h_t h_r}{\lambda}$.

Étape 3 Choix de l'équation de puissance :

- Si $d \ll d_{\text{seuil}}$ (ou liaison vue directe sans sol) : utiliser Friis $P_r = P_t G_t G_r (\lambda / 4\pi d)^2$.
- Si $d \gg d_{\text{seuil}}$: utiliser Two-Ray Ground $P_r = P_t G_t G_r \frac{h_t^2 h_r^2}{d^4}$.

Étape 4 Conversion en dBm : $P_{[\text{dBm}]} = 10 \log_{10} \left(\frac{P_{[\text{W}]}}{10^{-3}} \right) = 30 + 10 \log_{10}(P_{[\text{W}]})$.

Attention – Ne cherchez pas la fréquence dans la formule Two-Ray Ground à grande distance !

L'une des plus grandes surprises d'examen en LEPL1203 est que la formule asymptotique $P_r \approx P_t G_t G_r \frac{h_t^2 h_r^2}{d^4}$ **ne contient plus la longueur d'onde λ** . À grande distance au sol, les signaux à 900 MHz et à 2,6 GHz s'atténuent avec exactement la même loi géométrique en $1/d^4$!

Astuce – Échelle décibel rapide en télécoms

- 0 dBm = 1 mW = 10^{-3} W ; 30 dBm = 1 W ; 43 dBm = 20 W.
- Modèle de Friis (espace libre) : multiplier la distance par 2 fait chuter la puissance de **-6 dB** (pente -20 dB/décade).

- Modèle Two-Ray Ground (sol) : multiplier la distance par 2 fait chuter la puissance de **−12 dB** (pente -40 dB/décade).

Exemple – Application d'examen : Déploiement 4G sur l'autoroute E42 (Examen Janvier 2018)

Une station de base 4G à $f = 1,8$ GHz ($\lambda = \frac{3 \cdot 10^8}{1,8 \cdot 10^9} = \frac{1}{6}$ m $\approx 0,1667$ m) est installée à une hauteur $h_t = 25$ m au bord de l'autoroute E42. Elle émet une puissance de $P_t = 20$ W avec un gain $G_t = 16$ dBi ($\approx 39,8$). Une voiture équipée d'une antenne de toit de gain $G_r = 0$ dBi = 1 à hauteur $h_r = 1,5$ m roule à une distance $d = 2$ km = 2000 m.

Résolution pas-à-pas :

1. **Distance de transition seuil :**

$$d_{\text{seuil}} = \frac{4\pi h_t h_r}{\lambda} = \frac{4\pi \times 25 \times 1,5}{1/6} = \frac{150\pi}{1/6} = 900\pi \approx \mathbf{2827} \text{ m}$$

2. **Différence de marche et déphasage en $d = 2000$ m :**

$$\Delta r \approx \frac{2h_t h_r}{d} = \frac{2 \times 25 \times 1,5}{2000} = \frac{75}{2000} = 0,0375 \text{ m}$$

$$\Delta\phi_{\text{géom}} = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta r = \frac{2\pi}{1/6} \times 0,0375 = 12\pi \times 0,0375 = 0,45\pi \approx 1,414 \text{ rad} \approx 81^\circ$$

3. **Déphasage net avec le sol (π) :** $\Delta\phi_{\text{tot}} = 81^\circ + 180^\circ = 261^\circ$.
4. **Calcul du champ et de la puissance reçue :** Comme $d \approx 2000$ m est de l'ordre de d_{seuil} , la formule exacte de superposition donne :

$$|E_{\text{tot}}| = E_{\text{direct}} \sqrt{1 + 1 - 2 \cos(\Delta\phi_{\text{géom}})} = 2E_{\text{direct}} \sin\left(\frac{2\pi h_t h_r}{\lambda d}\right)$$

À plus grande distance ($d = 5$ km $> d_{\text{seuil}}$), la puissance reçue s'obtient directement par la formule asymptotique Two-Ray Ground :

$$P_r = P_t G_t G_r \frac{h_t^2 h_r^2}{d^4} = 20 \times 39,8 \times 1 \times \frac{(25)^2 \times (1,5)^2}{(5000)^4} \approx \mathbf{1,79 \cdot 10^{-9} \text{ W}} = \mathbf{-57,5 \text{ dBm}}$$

9 Crise de la Physique Classique & Dualité Onde-Corpuscule

À la fin du XIX^e siècle, la physique classique semblait achevée. Pourtant, trois énigmes expérimentales majeures — le rayonnement du corps noir, l'effet photoélectrique et la stabilité des raies spectrales atomiques — ont conduit à une remise en cause radicale de nos représentations physiques, initiant la révolution de la mécanique quantique.

9.1 Rappels théoriques

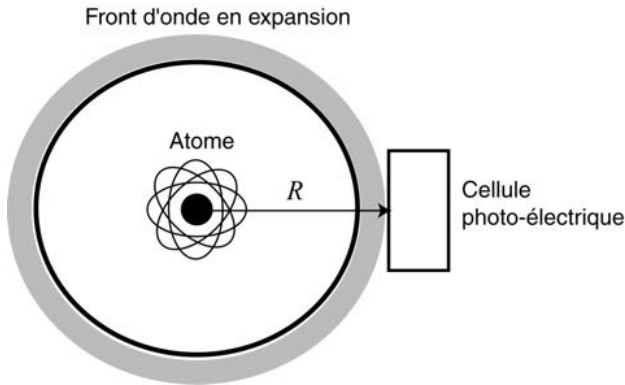


FIGURE 6 – Dispositif expérimental de l'effet photoélectrique.

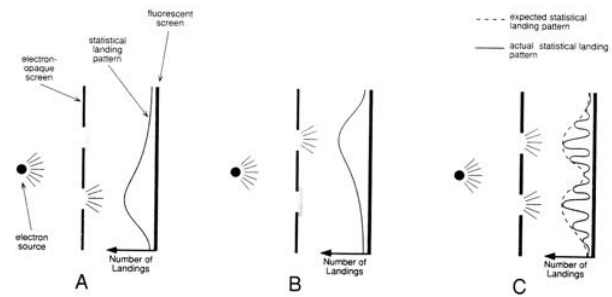


FIGURE 7 – Potentiel d'arrêt V_0 linéaire en fréquence f (pente h/e).

Théorème – Effet Photoélectrique (Einstein, 1905)

L'absorption d'un photon d'énergie quantifiée $E = hf = \hbar\omega$ par un électron d'un matériau conducteur arrache cet électron si l'énergie incidente dépasse le **travail d'extraction** $\Phi = W_0$ du métal. Le bilan d'énergie cinétique maximale des photoélectrons émis s'écrit :

$$K_{\max} = \frac{1}{2}m_e v_{\max}^2 = hf - \Phi = eV_0 \quad (91)$$

- V_0 est le **potentiel d'arrêt** (tension inverse minimale annulant le photocourant).
- Il existe une **fréquence seuil minimale** $f_0 = \frac{\Phi}{h}$ en-deçà de laquelle aucun électron n'est jamais extrait, quelle que soit l'intensité lumineuse !
- La droite expérimentale $V_0(f) = \frac{h}{e}f - \frac{\Phi}{e}$ possède une pente **universelle et constante** égale à $\frac{h}{e} \approx 4,136 \cdot 10^{-15} \text{ V} \cdot \text{s}$, commune à tous les métaux du tableau périodique.

Théorème – Effet Compton & Longueur d'onde Compton (1923)

La collision élastique relativiste entre un photon X d'énergie $h\nu$ et un électron libre au repos entraîne une perte d'énergie du photon diffusé d'un angle θ . L'accroissement de longueur d'onde vaut :

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \lambda_C(1 - \cos\theta)$$

avec la longueur d'onde Compton

$$\lambda_C = \frac{h}{m_e c} \approx 2,426 \cdot 10^{-12} \text{ m} = 2,426 \text{ pm} \quad (92)$$

Ce résultat prouve formellement que le photon transporte une **quantité de mouvement** $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k} = \frac{h}{\lambda}\mathbf{u}_k$.

Théorème – Hypothèse de Louis de Broglie (1924) & Ondes de matière

Toute particule matérielle d'impulsion $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ est intrinsèquement associée à une onde de longueur d'onde de de Broglie :

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv} = \frac{h}{\sqrt{2mE_c}} \quad (\text{en régime non relativiste } v \ll c) \quad (93)$$

Pour un électron de charge e accéléré depuis le repos par une différence de potentiel V :

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2m_e eV}} \approx \frac{1,226}{\sqrt{V}} \text{ nm} \quad (V \text{ en Volts}) \quad (94)$$

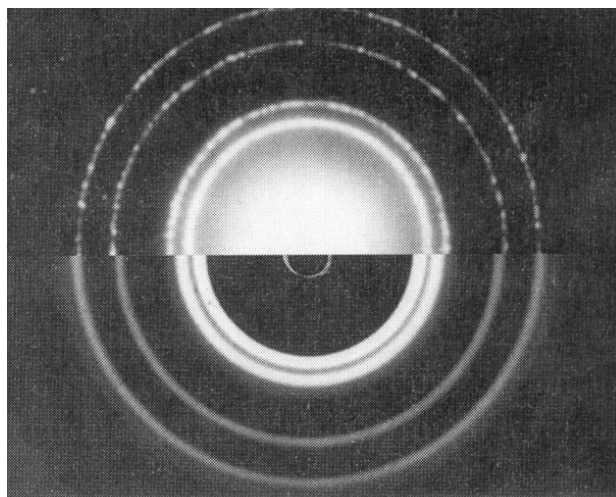


FIGURE 8 – Expérience de Davisson-Germer : diffraction des ondes de matière électroniques.

9.2 Procédures de résolution

Procédure : Calculs photoélectriques et de de Broglie

Donnée : Longueur d'onde λ ou tension d'accélération V .

Étape 1 Conversion des unités : Convertir systématiquement l'énergie en Joules ($1 \text{ eV} = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ J}$).

Étape 2 Énergie du photon : $E_{ph} = hf = hc/\lambda$. Constante utile : $hc \approx 1240 \text{ eV} \cdot \text{nm}$.

Étape 3 Potentiel d'arrêt et vitesse : $eV_0 = E_{ph} - \Phi \Rightarrow v_{\max} = \sqrt{2eV_0/m_e}$.

Étape 4 Longueur d'onde de de Broglie : $\lambda_{dB} = h/\sqrt{2mE_c}$.

Attention – Le piège des constantes h vs $\hbar$ et des unités d'énergie !

- $h \approx 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ est la constante de Planck classique.
- $\hbar = \frac{h}{2\pi} \approx 1,055 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ est la constante réduite (utilisée avec ω et k).
- Ne jamais mélanger des électron-volts avec des Joules dans $\sqrt{2mE}$!

10 Paquets d'Ondes, Heisenberg & Fonction d'Onde

Une particule quantique ne peut pas être décrite par une onde monochromatique infinie car celle-ci serait délocalisée dans tout l'univers. Elle est représentée par un **paquet d'ondes**, superposition continue d'ondes planes formant un groupe localisé. Cette nature ondulatoire impose les relations d'incertitude fondamentales de Heisenberg et fonde l'interprétation probabiliste de Born.

10.1 Rappels théoriques

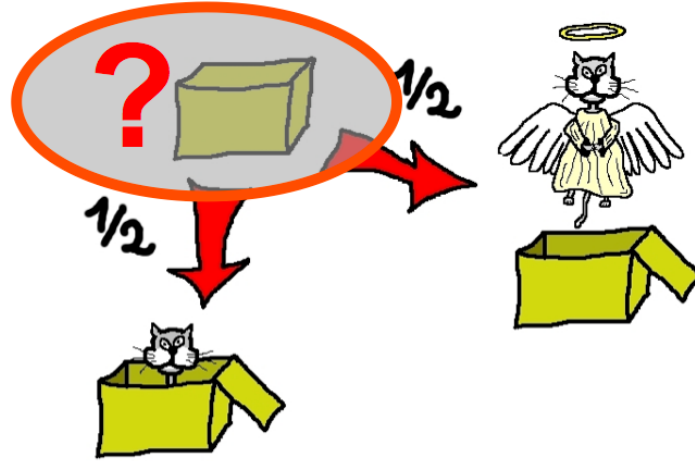


FIGURE 9 – Paquet d'ondes dans l'espace direct Δx et dans l'espace spectral Δk .

Théorème – Vitesse de phase vs Vitesse de groupe

Pour un paquet d'ondes d'extension spectrale centrée sur ω_0 et k_0 :

- La **vitesse de phase** v_ϕ est la vitesse de déplacement des oscillations haute fréquence individuelles :

$$v_\phi = \frac{\omega}{k} \quad (95)$$

- La **vitesse de groupe** v_g est la vitesse de propagation de l'enveloppe transportant l'énergie et la matière :

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{dE}{dp} \quad (96)$$

Pour une particule matérielle non relativiste : $E = \frac{p^2}{2m} \implies v_g = \frac{p}{m} = \boxed{v_{\text{particule}}}$. La particule quantique avance physiquement à la vitesse de groupe de son paquet d'ondes !

Théorème – Relations d'incertitude fondamentales de Heisenberg (1927)

La nature ondulatoire impose une borne inférieure absolue au produit des écarts-types statistiques mesurés sur des variables conjuguées :

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2} \quad \text{et} \quad \Delta E \cdot \Delta t \geq \frac{\hbar}{2} \quad (97)$$

Cette relation découle directement de la théorie de Fourier ($\Delta x \cdot \Delta k \geq 1/2$) associée à la relation de de Broglie $p = \hbar k$. Il est physiquement impossible de déterminer simultanément avec une précision absolue la position et l'impulsion d'une particule.

Définition – Fonction d'onde & Postulat probabiliste de Max Born (1926)

L'état d'une particule quantique est entièrement décrit par sa **fonction d'onde complexe** $\Psi(x, t) \in \mathbb{C}$.

- La grandeur $P(x, t) = |\Psi(x, t)|^2 = \Psi^*(x, t)\Psi(x, t)$ représente la **densité de probabilité de présence**.
- La probabilité de trouver la particule entre x_1 et x_2 à l'instant t vaut :

$$P(x_1 \leq x \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} |\Psi(x, t)|^2 dx \quad (98)$$

- **Condition de normalisation globale** (certitude de trouver la particule dans tout l'espace) :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi(x, t)|^2 dx = 1 \quad (99)$$

- Le **courant de probabilité quantique** satisfait l'équation de continuité locale $\frac{\partial |\Psi|^2}{\partial t} + \frac{\partial J}{\partial x} = 0$ avec :

$$J(x, t) = \frac{\hbar}{2mi} \left(\Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial x} - \Psi \frac{\partial \Psi^*}{\partial x} \right) = \text{Re} \left(\Psi^* \frac{\hat{p}}{m} \Psi \right) \quad (100)$$

10.2 Procédures de résolution**Procédure : Normalisation et calculs de moyennes quantiques**

Donnée : Fonction d'onde $\psi(x) = Ce^{-\alpha x^2}$ ou $\psi(x) = C \sin(kx)$ sur un domaine.

Étape 1 Normalisation : Poser $\int |\psi(x)|^2 dx = 1$ et intégrer pour trouver la constante $|C|$.

Étape 2 Position moyenne : Calculer $\langle x \rangle = \int x |\psi(x)|^2 dx$.

Étape 3 Impulsion moyenne : Calculer $\langle p \rangle = \int \psi^* \left(-i\hbar \frac{d\psi}{dx} \right) dx$.

Étape 4 Écart-type et incertitude : Calculer $\langle x^2 \rangle$ et $\langle p^2 \rangle$, puis $\Delta x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}$.

Astuce – Estimation immédiate de l'énergie de point zéro par Heisenberg

Pour une particule confinée dans une boîte de taille L , on a $\Delta x \approx L$, ce qui implique une impulsion minimale $p_{\min} \approx \Delta p \approx \frac{\hbar}{2L}$. L'énergie cinétique minimale de confinement vaut donc obligatoirement :

$$E_{\min} \approx \frac{p_{\min}^2}{2m} \approx \frac{\hbar^2}{8mL^2} > 0$$

Ceci démontre qu'une particule quantique confinée ne peut **jamais** être au repos absolu ($E = 0$ est interdit) !

11 Équation de Schrödinger & Puits de Potentiel 1D

L'équation de Schrödinger joue en mécanique quantique le rôle de la deuxième loi de Newton en mécanique classique. Pour les potentiels indépendants du temps, la séparation des variables conduit aux états stationnaires d'énergie bien définie. Le puits de potentiel infini illustre de façon limpide le phénomène universel de **quantification de l'énergie** résultant du confinement spatial.

11.1 Rappels théoriques

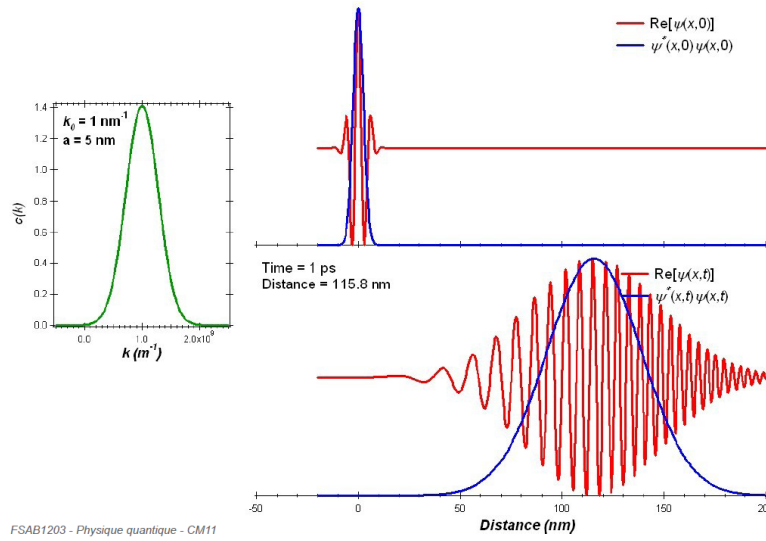


FIGURE 10 – Puits de potentiel infini 1D : fonctions d'onde propres $\psi_n(x)$ et densités de probabilité $|\psi_n(x)|^2$.

Théorème – Équation de Schrödinger dépendante et indépendante du temps

L'évolution temporelle de l'état quantique est régie par l'**Équation de Schrödinger Dépendante du Temps (ESDT)** :

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial t} = \hat{H} \Psi(x,t) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) \right) \Psi(x,t) \quad (101)$$

Pour un potentiel stationnaire $V(x)$, la méthode de séparation des variables $\Psi(x,t) = \psi(x)e^{-iEt/\hbar}$ conduit à l'**Équation de Schrödinger Indépendante du Temps (ESIT)** :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi(x)}{dx^2} + V(x)\psi(x) = E\psi(x) \quad (102)$$

— **Conditions de régularité de $\psi(x)$** :

1. $\psi(x)$ doit être **continue partout** dans l'espace.
2. Sa dérivée première $\psi'(x)$ doit être **continue partout**, sauf aux points où le potentiel $V(x)$ présente une discontinuité infinie.
3. $\psi(x)$ doit être de carré sommable ($\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi|^2 dx < \infty$).

Théorème – Puits de potentiel infini 1D de largeur L

Soit le potentiel puits infini défini par $V(x) = 0$ pour $x \in [0, L]$ et $V(x) = +\infty$ ailleurs. La particule étant strictement confinée dans la boîte, $\psi(x) = 0$ pour $x \leq 0$ et $x \geq L$.

- Les **fonctions d'onde propres stationnaires** normalisées sont :

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad n \in \{1, 2, 3, \dots\} \quad (103)$$

- Les **niveaux d'énergie quantifiés** discrets sont :

$$E_n = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2mL^2} = n^2 \frac{\hbar^2}{8mL^2} = n^2 E_1 \quad (104)$$

- L'état fondamental ($n = 1$) a une énergie non nulle $E_1 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2} > 0$ (**énergie de point zéro**).
- Le mode propre $\psi_n(x)$ possède exactement $n - 1$ nœuds (zéros internes) dans l'intervalle ouvert $]0, L[$.

Théorème – Puits de potentiel fini de profondeur V_0

Pour un puits fini de largeur $2a$ centré en 0 ($V(x) = 0$ pour $|x| < a$ et V_0 pour $|x| > a$) :

- Dans la région permise ($|x| < a$), la solution est sinusoïdale de vecteur d'onde $k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$.
- Dans la région classiquement interdite ($|x| > a$, $E < V_0$), la solution est une **onde évanescente** :

$$\psi(x) \propto e^{-\kappa|x|} \quad \text{avec le paramètre d'atténuation} \quad \kappa = \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar}$$

- La probabilité de présence hors du puits n'est pas nulle : la particule quantique pénètre dans la barrière sur une profondeur de pénétration caractéristique $\delta \approx 1/\kappa$.
- Le nombre d'états liés est **fini** et déterminé par la résolution graphique d'équations transcendentes séparées selon la parité.

11.2 Exemple résolu réel : Probabilité de présence dans le puits infini**Exemple – Probabilité de présence dans le tiers central du puits**

Une particule de masse m est dans un puits infini 1D de largeur $L \in [0, L]$. Calculons la probabilité de la trouver dans le tiers central $[L/3, 2L/3]$ pour l'état fondamental ($n = 1$) et le premier état excité ($n = 2$).

Résolution pas-à-pas : La probabilité de présence s'écrit :

$$P = \int_{L/3}^{2L/3} |\psi_n(x)|^2 dx = \frac{2}{L} \int_{L/3}^{2L/3} \sin^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

En utilisant la relation trigonométrique $\sin^2(u) = \frac{1 - \cos(2u)}{2}$:

$$P = \frac{1}{L} \int_{L/3}^{2L/3} \left[1 - \cos\left(\frac{2n\pi x}{L}\right)\right] dx = \frac{1}{L} \left[x - \frac{L}{2n\pi} \sin\left(\frac{2n\pi x}{L}\right) \right]_{L/3}^{2L/3} = \frac{1}{3} - \frac{1}{2n\pi} \left[\sin\left(\frac{4n\pi}{3}\right) - \sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right) \right]$$

- **Pour l'état fondamental** ($n = 1$) :

$$\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) - \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3}$$

$$P_1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{2\pi}(-\sqrt{3}) = \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2\pi} \approx 0,3333 + 0,2757 = \boxed{0,609 \approx 60,9\%}$$

En physique classique (densité uniforme), la probabilité serait de 33,3%. En quantique, la particule a presque le double de probabilité d'être au centre !

— **Pour le premier état excité ($n = 2$) :**

$$\sin\left(\frac{8\pi}{3}\right) - \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = +\sqrt{3}$$

$$P_2 = \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4\pi} \approx 0,3333 - 0,1378 = \boxed{0,195 \approx 19,5\%}$$

L'état $n = 2$ possède un nœud exactement au milieu ($x = L/2 \implies \psi_2(L/2) = 0$), d'où une probabilité très affaiblie au centre.

12 Effet Tunnel & Barrières de Potentiel

L'effet tunnel est l'une des prédictions les plus fascinantes et contre-intuitives de la mécanique quantique : une particule dont l'énergie totale E est inférieure à la hauteur d'une barrière de potentiel V_0 possède une probabilité non nulle de traverser cette barrière sans jamais acquérir d'énergie supplémentaire. Ce phénomène purement ondulatoire régit la radioactivité alpha, la fusion thermonucléaire au cœur des étoiles et le fonctionnement du microscope à effet tunnel (STM).

12.1 Rappels théoriques

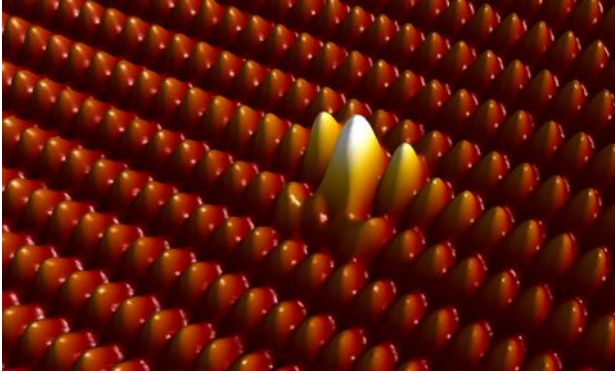


FIGURE 11 – Onde incidente, onde évanescence dans la barrière et onde transmise.

Table 41.1 Quantum States of the Hydrogen Atom

n	l	m_l	Spectroscopic Notation	Shell
1	0	0	1s	K
2	0	0	2s	L
2	1	-1, 0, 1	2p	
3	0	0	3s	M
3	1	-1, 0, 1	3p	
3	2	-2, -1, 0, 1, 2	3d	
4	0	0	4s	N
and so on.				

FIGURE 12 – Microscope à effet tunnel (STM) et dépendance du courant.

Théorème – Franchissement d'une barrière rectangulaire de potentiel

Soit une barrière de potentiel de hauteur V_0 et de largeur a ($V(x) = V_0$ pour $0 \leq x \leq a$ et $V(x) = 0$ ailleurs). Une particule incidente d'énergie $E < V_0$ arrivant de la gauche possède :

- Région I ($x < 0$) : $\psi_I(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$ avec $k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$.
- Région II ($0 \leq x \leq a$) : $\psi_{II}(x) = Ce^{-\kappa x} + De^{+\kappa x}$ avec le **paramètre d'atténuation** :

$$\kappa = \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar} \quad (105)$$

- Région III ($x > a$) : $\psi_{III}(x) = Fe^{ikx}$ (onde transmise).

En raccordant la fonction d'onde et sa dérivée en $x = 0$ et $x = a$, on obtient le **coefficient de transmission tunnel** T (dans l'approximation d'une barrière épaisse ou fortement atténuante $\kappa a \gg 1$) :

$$T = \frac{|F|^2}{|A|^2} \approx 16 \frac{E}{V_0} \left(1 - \frac{E}{V_0}\right) e^{-2\kappa a} \approx e^{-2\kappa a} \quad (106)$$

Le coefficient de réflexion vaut $R = 1 - T \approx 1 - e^{-2\kappa a}$.

Propriété – Sensibilité exponentielle & Microscope à Effet Tunnel (STM)

La transmission tunnel dépend **exponentiellement** de la largeur a de la barrière :

$$T \propto e^{-2\kappa a} \quad \Rightarrow \quad \frac{dT}{T} = -2\kappa da \quad (107)$$

Dans un microscope STM (Binnig & Rohrer, Prix Nobel 1986), une pointe métallique nanométrique survole une surface conductrice à une distance $d \sim 0,5$ nm. Sous une faible tension de polarisation

V_{pol} , le courant tunnel mesuré s'exprime par :

$$I_{tunnel} \propto V_{pol} e^{-2\kappa d} \quad \text{avec} \quad \kappa \approx \frac{\sqrt{2m_e\Phi}}{\hbar} \quad (108)$$

où Φ est le travail de sortie effectif de la jonction ($\Phi \approx 4 \text{ eV} \Rightarrow \kappa \approx 10 \text{ nm}^{-1} \Rightarrow 2\kappa \approx 20 \text{ nm}^{-1} = 2 \text{ \AA}^{-1}$). **Conséquence spectaculaire :** Une variation de distance infime de $\Delta d = 0,1 \text{ nm} = 1 \text{ \AA}$ (diamètre d'un atome) fait varier le courant d'un facteur $e^2 \approx 7,4 \approx 10!$ Cela confère au STM une résolution verticale subatomique inférieure au picomètre ($< 0,01 \text{ \AA}$).

12.2 Procédures de résolution

Procédure : Calcul de coefficient tunnel et de variation de courant STM

Donnée : Énergie E , barrière V_0 , largeur a , ou déplacement de pointe Δd .

Étape 1 Calcul du décalage énergétique : ($V_0 - E$) impérativement converti en Joules ($1 \text{ eV} = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ J}$).

Étape 2 Calcul de κ : $\kappa = \sqrt{2m(V_0 - E)}/\hbar$.

Étape 3 Atténuation de la barrière : Évaluer le produit κa . S'il dépasse 2, la formule asymptotique $T \approx e^{-2\kappa a}$ est excellente.

Étape 4 Variation de courant STM : Pour un recul de la pointe $\Delta d > 0$: $\frac{I_{\text{final}}}{I_{\text{initial}}} = e^{-2\kappa\Delta d}$.

Exemple – Calcul d'atténuation de courant STM d'examen

Une pointe STM de travail de sortie $\Phi = 4,5 \text{ eV}$ s'éloigne de la surface d'une distance $\Delta d = 0,15 \text{ nm}$. Calculons le facteur de réduction du courant tunnel.

Résolution pas-à-pas :

1. **Calcul de κ pour l'électron :**

$$\Phi = 4,5 \times 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ J} = 7,209 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

$$\kappa = \frac{\sqrt{2 \times 9,109 \cdot 10^{-31} \times 7,209 \cdot 10^{-19}}}{1,055 \cdot 10^{-34}} = \frac{\sqrt{1,313 \cdot 10^{-48}}}{1,055 \cdot 10^{-34}} = \frac{1,146 \cdot 10^{-24}}{1,055 \cdot 10^{-34}} \approx 1,086 \cdot 10^{10} \text{ m}^{-1} = 10,86 \text{ nm}^{-1}$$

2. **Facteur exponentiel $2\kappa\Delta d$:**

$$2\kappa\Delta d = 2 \times 10,86 \text{ nm}^{-1} \times 0,15 \text{ nm} = 3,258$$

3. **Rapport de courant :**

$$\frac{I_{\text{final}}}{I_{\text{initial}}} = e^{-2\kappa\Delta d} = e^{-3,258} \approx \boxed{0,0385 \approx 3,85\%}$$

Le courant chute de plus de 96% pour un déplacement d'à peine un dixième de nanomètre !

13 Modèle Quantique de l'Atome & Introduction aux Solides

La résolution de l'équation de Schrödinger tridimensionnelle pour le potentiel coulombien central de l'atome d'hydrogène constitue le triomphe absolu de la mécanique quantique. Elle explique rigoureusement la structure du tableau périodique des éléments via le principe d'exclusion de Pauli, et pose les fondements de la physique du solide et des semi-conducteurs grâce à la théorie des bandes d'énergie.

13.1 Rappels théoriques

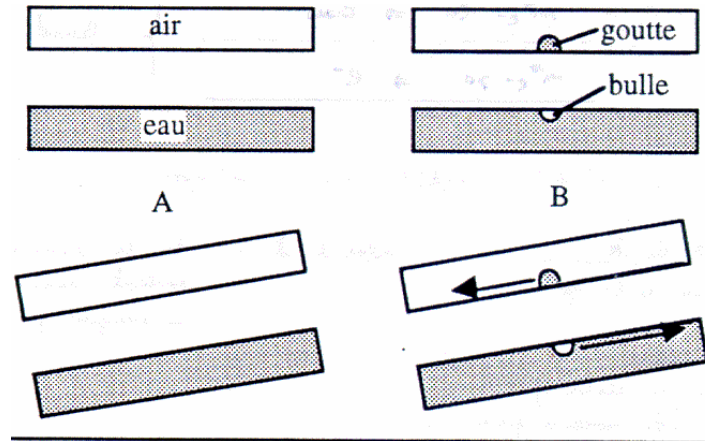


FIGURE 13 – Densités de probabilité radiales et orbitales atomiques de l'hydrogène.

Théorème – L'atome d'hydrogène 3D & Les 4 Nombres Quantiques

L'électron plongé dans le potentiel central coulombien $V(r) = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$ possède une fonction d'onde factorisable en coordonnées sphériques :

$$\psi_{nlm_l}(r, \theta, \phi) = R_{nl}(r) Y_{lm_l}(\theta, \phi) \quad (109)$$

Les états stationnaires sont caractérisés par **quatre nombres quantiques entiers ou demi-entiers** :

1. **Nombre quantique principal** $n \in \{1, 2, 3, \dots\}$: Fixe l'énergie quantifiée de l'état :

$$E_n = -\frac{m_e e^4}{32\pi^2 \epsilon_0^2 \hbar^2} \frac{1}{n^2} = -\frac{13,6 \text{ eV}}{n^2} \quad (110)$$

2. **Nombre quantique orbital (azimutal)** $l \in \{0, 1, \dots, n-1\}$: Fixe la norme du moment cinétique orbital :

$$\|\mathbf{L}\| = \sqrt{l(l+1)} \hbar \quad (l = 0 \rightarrow s, \quad l = 1 \rightarrow p, \quad l = 2 \rightarrow d, \quad l = 3 \rightarrow f) \quad (111)$$

3. **Nombre quantique magnétique** $m_l \in \{-l, -l+1, \dots, +l\}$ ($2l+1$ valeurs) : Fixe la projection du moment cinétique sur l'axe de quantification z :

$$L_z = m_l \hbar \quad (112)$$

4. **Nombre quantique de spin** $m_s \in \{-1/2, +1/2\}$: Fixe la composante du spin intrinsèque $S_z = m_s \hbar$.

- **Dégénérescence totale** du niveau n (hors spin) : $\sum_{l=0}^{n-1} (2l+1) = n^2$. Avec le spin de l'électron : $g_n = 2n^2$.
- **Règles de sélection dipolaires électriques** pour l'émission/absorption d'un photon : $\Delta l = \pm 1$ et $\Delta m_l = 0, \pm 1$.

Propriété – Formule de Rydberg pour les transitions spectrales atomiques

Lors de la désexcitation d'un électron d'un niveau n_2 vers un niveau inférieur n_1 ($n_2 > n_1$), la longueur d'onde du photon émis est donnée par la **formule de Rydberg** :

$$\Delta E = E_{n_2} - E_{n_1} = \frac{hc}{\lambda} \implies \frac{1}{\lambda} = R_H \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right) \quad (113)$$

où la constante de Rydberg vaut $R_H = \frac{13,6 \text{ eV}}{hc} \approx 1,09737 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}$.

- $n_1 = 1$: Série de **Lyman** (domaine ultraviolet).
- $n_1 = 2$: Série de **Balmer** (domaine visible, raie rouge H_α pour $n_2 = 3$).
- $n_1 = 3$: Série de **Paschen** (domaine infrarouge).

Théorème – Introduction aux bandes d'énergie dans les solides

Lorsque N atomes identiques ($N \sim 10^{23}$) sont rapprochés pour former un réseau cristallin périodique :

- Le recouvrement des fonctions d'onde électroniques lève la dégénérescence des niveaux atomiques isolés : chaque niveau discret se scinde en N sous-niveaux infiniment serrés, formant des **bandes d'énergie permises quasi-continues**.
- Les bandes permises sont séparées par des **bandes interdites** (*gaps* d'énergie E_g) où aucun électron ne peut exister.
- **Classification des matériaux** selon la structure de bandes à $T = 0 \text{ K}$:
 - Métaux (Conducteurs)** : La bande de conduction est partiellement occupée ou chevauche la bande de valence. Les électrons circulent librement sous un champ électrique.
 - Isolants** : La bande de valence est totalement pleine et séparée de la bande de conduction vide par un large gap énergétique ($E_g > 4 \text{ eV}$). L'agitation thermique ambiante est impuissante à exciter des porteurs.
 - Semi-conducteurs (Silicium, Germanium)** : La bande de valence est pleine à 0 K , mais le gap est modéré ($E_g \approx 1,12 \text{ eV}$ pour le Silicium). À 300 K , l'énergie thermique franchit le gap et génère des paires électron-trou conductrices.

13.2 Procédures de résolution

Exemple – Calcul de la raie H_α de Balmer de l'hydrogène

Calculons la longueur d'onde de la raie rouge fondamentale de l'hydrogène correspondant à la transition $n = 3 \rightarrow n = 1 + 1 = 2$.

Résolution pas-à-pas :

1. **Formule de Rydberg** : Pour $n_1 = 2$ et $n_2 = 3$:

$$\frac{1}{\lambda} = R_H \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} \right) = R_H \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{9} \right) = \frac{5}{36} R_H$$

2. Longueur d'onde :

$$\lambda = \frac{36}{5R_H} = \frac{36}{5 \times 1,09737 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}} = \frac{36}{5,48685 \cdot 10^7} \approx 6,561 \cdot 10^{-7} \text{ m} = \boxed{656,3 \text{ nm}}$$

Cette raie spectrale correspond exactement à la raie rouge vif H_α observée en astronomie et spectroscopie.

14 Méthodes transversales & Réflexes d'examen

Ce dernier chapitre ne contient aucune théorie nouvelle, mais rassemble la **boîte à outils stratégique de terrain** indispensable pour naviguer sans hésitation à travers les épreuves d'examen de LEPL1203, déjouer les pièges récurrents et vérifier instantanément la cohérence de vos résultats.

14.1 Les 10 Red Flags absolus d'examen

Si vous constatez l'une des situations d'alerte suivantes sur votre copie, **arrêtez-vous immédiatement** et réorientez votre calcul !

Attention – Red Flag 1 : Confusion Onde Stationnaire vs Onde Progressive

Alerte : Vous utilisez $v = \omega/k$ pour calculer un déplacement de nœuds sur une onde stationnaire du type $\cos(kx)\cos(\omega t)$. **Que faire ?**

- Une onde stationnaire **ne se propage pas** : les nœuds et ventres sont immobiles dans l'espace ($x_n = n\lambda/2$).
- Seule une onde progressive dépendante d'un argument combiné ($kx \pm \omega t$) possède une vitesse de propagation physique $v = \omega/k$.

Attention – Red Flag 2 : Oubli du saut de phase π à la réflexion sur frontière rigide

Alerte : Lors d'une réflexion sur une frontière plus rigide ($Z_2 > Z_1$) ou plus réfringente ($n_2 > n_1$), vous écrivez que le champ réfléchi est en phase. **Que faire ?**

- Lorsque $Z_2 > Z_1$, le coefficient d'amplitude $r = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}$ est **négatif**, ce qui équivaut à un **déphasage de π** (l'onde est inversée tête-bêche).
- Ne jamais oublier d'ajouter π au déphasage dans les calculs d'onde résultante ou d'interférence par réflexion !

Attention – Red Flag 3 : Confusion entre fentes de diffraction et pas d'interférence

Alerte : Dans un exercice combiné, vous écrivez $a \sin \theta = m\lambda$ pour chercher les pics lumineux. **Que faire ?**

- $d \sin \theta = m\lambda$ donne les **pics principaux d'interférence** (écartement d entre centres des fentes).
- $a \sin \theta = p\lambda$ ($p \in \mathbb{Z}^*$) donne les **zéros d'extinction de la diffraction** (largeur individuelle a de la fente).
- Si $m/p = d/a$, le pic d'interférence disparaît complètement (**ordre manquant**).

Attention – Red Flag 4 : Confusion fatale entre h et $\hbar$ et omission de conversion eV $\rightarrow$ J

Alerte : Vous injectez directement une énergie en eV dans $\sqrt{2mE}/\hbar$ ou vous mélangez h et $\hbar$. **Que faire ?**

- Tout calcul numérique de λ , p , κ ou de transmission tunnel exige les unités SI : Joules, kg, m, s.
- Rappel salvateur : $1 \text{ eV} = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ J}$ et $\hbar = \frac{h}{2\pi} \approx 1,055 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$.

Attention – Red Flag 5 : Fonction d'onde non normalisée avant calcul de probabilité

Alerte : Vous intégrez une fonction d'onde brute $\sin(n\pi x/L)$ sans son préfacteur de normalisation. **Que faire ?**

- Toute probabilité calculée avec une fonction non normalisée peut dépasser 1 ou être fausse d'un facteur dimensionnel.

— Pour le puits infini $[0, L]$, le préfacteur est **toujours** $\sqrt{2/L}$.

Attention – Red Flag 6 : Exposant erroné dans le coefficient tunnel T

Alerte : Vous écrivez $T \approx e^{-\kappa a}$ au lieu de $e^{-2\kappa a}$. **Que faire ?**

- Le facteur κ régit l'atténuation de la **fonction d'onde** $\psi(x) \propto e^{-\kappa x}$.
- La **probabilité** et le **courant** dépendent du carré du module $|\psi|^2 \propto e^{-2\kappa x}$. L'exposant de transmission est donc **obligatoirement** $-2\kappa a$.

Attention – Red Flag 7 : Oubli du saut de phase π sur sol rasant ou interface diélectrique plus réfringente

Alerte : Dans un problème de canal radio Two-Ray Ground ou d'interférence en couche mince ($n_1 < n_2$), vous calculez l'interférence avec la seule différence de marche géométrique sans ajouter π . **Que faire ?**

- Pour une réflexion rasante sur la Terre ($\theta_i \approx \pi/2$), le coefficient de réflexion vaut $r \rightarrow -1 = e^{j\pi}$: le rayon réfléchi subit un **saut de phase intrinsèque de π** .
- En couche mince, toute réflexion sur un milieu d'indice supérieur ($n_{\text{sup}} > n_{\text{inf}}$) introduit un saut de phase de π (équivalent à un demi-chemin optique $\lambda/2$).
- Si un seul des deux rayons subit ce saut de π , la condition constructive devient $2n_2 e \cos \theta_2 = (m + 1/2)\lambda$ et la condition d'extinction devient $2n_2 e \cos \theta_2 = m\lambda$!

Attention – Red Flag 8 : Confusion de décroissance entre espace libre ($1/d^2$) et canal multi-trajet ($1/d^4$)

Alerte : Vous appliquez la formule de Friis $P_r \propto 1/d^2$ pour estimer la portée d'une antenne relais 4G/5G au-dessus d'une autoroute ou du sol à grande distance. **Que faire ?**

- La formule de Friis ($P_r \propto 1/d^2$, soit -20 dB/décade) n'est valide ****qu'en champ libre absolu**** sans sol réflecteur.
- En présence du sol, l'interférence destructive quasi-parfaite entre rayon direct et rayon réfléchi impose au-delà de la distance critique $d_c = \frac{4\pi h_t h_r}{\lambda}$ une atténuation asymptotique sévère en $\boxed{P_r \approx P_t G_t G_r \frac{h_t^2 h_r^2}{d^4}}$ (soit -40 dB/décade), **rigoureusement indépendante de la longueur d'onde λ !**

Attention – Red Flag 9 : Oubli que les tuyaux ouverts-fermés ne vibrent QUE sur les harmoniques impaires

Alerte : Dans un tuyau sonore fermé à une extrémité et ouvert à l'autre, vous écrivez $f_n = n \frac{v}{2L}$ ou vous comptez des harmoniques paires ($f_2 = 2f_1$). **Que faire ?**

- L'extrémité ouverte impose un nœud de surpression ($\Delta p = 0$), le fond fermé un ventre ($\Delta p = \Delta p_{\text{max}}$).
- Le tube ne peut contenir qu'un nombre impair de quarts d'onde : $L = (2m - 1) \frac{\lambda}{4}$.
- Les fréquences propres sont strictement $\boxed{f_m = (2m - 1) \frac{v}{4L}}$ ($m = 1, 2, 3, \dots$) $\implies f_1 = \frac{v}{4L}$, $f_2 = 3f_1$, $f_3 = 5f_1$. Les harmoniques paires sont **physiquement impossibles**.

Attention – Red Flag 10 : Addition directe des niveaux en décibels au lieu des puissances/intensités

Alerte : Deux moteurs génèrent chacun 75 dB et vous concluez que le niveau sonore combiné est $75 + 75 = 150$ dB. **Que faire ?**

- Les décibels sont logarithmiques : ****on ne peut jamais additionner directement des grandeurs en dB****.
- On doit impérativement sommer les intensités physiques $I = I_0 10^{\beta/10}$ (en $\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$) : $I_{\text{tot}} = I_1 + I_2 = 2I_1$.
- Deux sources identiques incohérentes augmentent le niveau sonore de $+3$ dB exactement : $\beta_{\text{tot}} = 75 + 10 \log_{10}(2) \approx 78$ dB.

14.2 Grand Arbre Décisionnel Transversal

Arbre Décisionnel Global LEPL1203

Identifier la physique centrale et la
boîte à outils de l'énoncé d'examen

1. Ondes Mécaniques & Acoustique (Corde vibrante, Fluides & Tuyaux)

- **Corde & Fluides** : Vitesse $v = \sqrt{T_0/\mu} = \sqrt{B/\rho_0}$, impédance $Z = \mu v$ ou $Z_{ac} = \rho_0 v$, surpression $\Delta p_{\max} = Z_{ac} \omega s_{\max}$.
- **Niveaux sonores** : $\beta = 10 \log_{10}(I/I_0)$, addition incohérente $I_{\text{tot}} = \sum I_k$, décroissance 3D $\Delta\beta = 20 \log_{10}(r_1/r_2)$.
- **Effet Doppler** : $f_R = f_S \frac{v \pm v_R}{v \mp v_S}$, battement radar $f_{\text{bat}} = \frac{2u}{v} f$, redshift stellaire $z \approx v/c$.
- **Modes stationnaires** : Corde ou tuyau ouvert-ouvert $f_n = n \frac{v}{2L}$; tuyau ouvert-fermé $f_m = (2m-1) \frac{v}{4L}$ (impaires).

2. Optique Ondulatoire (Polarisation, Interférences & Diffraction)

- **Polarisation & Dioptries** : Malus $I = I_0 \cos^2 \theta$, Brewster $\tan \theta_B = n_2/n_1$, réflexion totale $\sin \theta_c = n_2/n_1$, Fresnel amplitude $(r_{\perp}, r_{\parallel})$.
- **Fentes d'Young & Réseaux** : Interfrange $i = \frac{\lambda D}{d}$, pics principaux à $d \sin \theta = m\lambda$, ordres manquants si $d/a = m/p$.
- **Couches minces & Interféromètres** : Différence de marche $\delta = 2n_2 e \cos \theta_2$ ($\pm\pi$ si réflexion sur indice plus élevé), quart d'onde antireflet $e = \frac{\lambda}{4n_2}$, coin d'air $i = \frac{\lambda}{2\alpha}$, Michelson $\Delta x = \Delta m \frac{\lambda}{2}$, Bragg $2d \sin \theta = m\lambda$.
- **Diffraction de Fraunhofer** : Zéros d'extinction à $a \sin \theta = p\lambda$ ($p \in \mathbb{Z}^*$), résolution angulaire d'Airy $\theta_R = 1,22\lambda/D$.

3. Rayonnement Électromagnétique, Antennes & Télécoms

- **Dipôle court de Hertz** ($L \ll \lambda$) : Champ $E_{\theta} \propto \frac{\sin \theta}{r}$, résistance de rayonnement $R_{\text{rad}} = 80\pi^2 \left(\frac{L}{\lambda}\right)^2$, PIRE = $P_t G_t$.
- **Espace libre (Formule de Friis)** : $P_r = P_t G_t G_r \left(\frac{\lambda}{4\pi d}\right)^2 \propto \frac{1}{d^2}$ (décroissance -20 dB/décade).
- **Canal Two-Ray Ground (Sol rasant)** : Déphasage $\Delta\phi = k \frac{2h_t h_r}{d} + \pi \implies$ Puissance asymptotique $P_r \approx P_t G_t G_r \frac{h_t^2 h_r^2}{d^4}$ (décroissance -40 dB/décade, indépendante de λ !). Seuil critique $d_c = \frac{4\pi h_t h_r}{\lambda}$.

4. Physique Quantique (Ondes de matière, Puits & Effet Tunnel)

- **Effet photoélectrique & de Broglie** : $eV_0 = hf - \Phi$, impulsion $p = \hbar k$, longueur d'onde associée $\lambda = h/p = h/\sqrt{2mE}$.
- **Incertitudes de Heisenberg** : $\Delta x \Delta p \geq \hbar/2$, $\Delta E \Delta t \geq \hbar/2$, vitesse particule $v_{\text{part}} = v_g = \frac{d\omega}{dk}$.
- **Puits infini 1D** $[0, L]$: $\psi_n = \sqrt{2/L} \sin(n\pi x/L)$, énergies quantifiées $E_n = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2mL^2}$, $n-1$ nœuds internes.
- **Barrière & Effet Tunnel** : Facteur d'atténuation $\kappa = \frac{\sqrt{2m(V_0-E)}}{\hbar}$, transmission $T \approx e^{-2\kappa a}$, courant STM $I \propto e^{-2\kappa d}$.

14.3 Vérifications de bon sens (*Sanity Checks*) en 10 secondes

Avant de clore une question d'examen, effectuez systématiquement ces quatre vérifications express :

1. Conservation rigoureuse de l'énergie :

- En onde mécanique ou optique : $R + T = 1$. Si vous trouvez $R + T \neq 1$, vérifiez le préfacteur Z_2/Z_1 ou les indices n_2/n_1 .
- En mécanique quantique : pour une barrière de potentiel, la somme des courants de probabilité réfléchi et transmis égale le courant incident ($R + T = 1$).

2. Positivité absolue des grandeurs physiques :

- Les probabilités de présence P doivent impérativement être comprises dans $[0, 1]$.
- L'intensité lumineuse I , l'énergie mécanique E_m , la pulsation ω et la vitesse v sont strictement positives.

3. Cohérence dimensionnelle instantanée :

- L'argument d'un sinus, cosinus ou d'une exponentielle doit être **strictement sans dimension** (kx , ωt , κx).
- L'impédance mécanique a pour dimension $[\mu v] = \text{kg} \cdot \text{s}^{-1}$; l'impédance électromagnétique a pour dimension $[\sqrt{\mu/\epsilon}] = \Omega$.
- $\hbar k$ a la dimension d'une impulsion ($\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$) et $\hbar\omega$ d'une énergie (J).

4. Comportement asymptotique aux limites physiques :

- Si la largeur du puits $L \rightarrow \infty$, l'écart entre niveaux quantiques $\Delta E \rightarrow 0$: on retrouve le continuum classique !
- Si la hauteur de la barrière $V_0 \rightarrow \infty$ ou son épaisseur $a \rightarrow \infty$, la transmission tunnel $T \rightarrow 0$: la particule est bloquée.
- Si la constante de Planck $\hbar \rightarrow 0$, les incertitudes d'Heisenberg tendent vers 0 et la mécanique quantique redonne la mécanique classique.

14.4 Tableau comparatif unifié : Ondes Classiques vs Ondes Quantiques

Caractéristique	Ondes Classiques (Corde, Son, Lumière)	Ondes Quantiques (Matière, de Broglie)
Équation maîtresse	Équation de d'Alembert : $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0$ (ordre 2 en t)	Équation de Schrödinger : $i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hat{H} \Psi$ (ordre 1 en t)
Nature de l'amplitude	Grandeur réelle mesurable (déplacement y , champ $\mathbf{E}$, pression p)	Fonction complexe $\Psi(x, t) \in \mathbb{C}$ sans réalité directe
Signification physique	L'intensité $I \propto A^2$ représente le flux d'énergie physique	Le carré du module $ \Psi ^2$ représente une densité de probabilité
Vitesse de phase	$v_\phi = \omega/k = v$ (non dispersif dans le vide)	$v_\phi = \hbar\omega/\hbar k = E/p = v_{part}/2$
Vitesse de propagation	$v = c$ ou $\sqrt{T_0/\mu}$	Vitesse de groupe : $v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{p}{m} = v_{particule}$
Région interdite ($E < V$)	Onde évanescente (réflexion totale, pas d'énergie transportée)	Onde évanescence donnant lieu à l' effet tunnel ($T > 0$)
Confinement spatial	Modes propres stationnaires discrets ($f_n = n f_1$)	Quantification de l'énergie ($E_n = n^2 E_1$ dans le puits)

TABLE 1 – Synthèse comparative transversale des formalismes ondulatoire classique et quantique.